

## Robert Hooke i grawitacja

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Portrait of a Mathematician (około 1680 r.), autorstwa Mary Beale, jest jedynym portretem przedstawiającym (prawdopodobnie) Roberta Hooke'a



Charakterystyczny The Monument to the Great Fire of London jest pamiątką po tragicznym pożarze Londynu i instrumentem naukowym jednocześnie

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*, Mikołaj SIERŻĘGA\*

Celem tego artykułu jest zainteresowanie Czytelnika postacią uczonego Roberta Hooke'a (1635–1703). Był on jednym z pionierów rewolucji naukowej XVII wieku, zapomnianym przez ponad 200 lat, a dopiero od niedawna odkrywany na nowo. Wkład Hooke'a w rozwój szeregu dyscyplin filozofii naturalnej jest wręcz przytłaczający, o czym wymownie świadczy fakt, że jego dokonania zajmują jedną trzecią piętnastotomowego opracowania *Early Science in Oxford* autorstwa Roberta T. Gunthera; informacja pochodzi z [7]. Historia Roberta Hooke'a jest jaskrawym przykładem znanej zasady Władimira I. Arnolda:

*Jeśli jakiś koncept nosi nazwisko konkretnej osoby, to nie jest ono nazwiskiem jego odkrywcy.*

Przez 40 lat Hooke pełnił funkcję kuratora eksperymentów naukowych w nowo powstałym Królewskim Towarzystwie w Londynie dla Rozszerzania Wiedzy o Przyrodzie (*The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge*), gdzie co tydzień demonstrował zgromadzonym członkom Towarzystwa zaprojektowane przez siebie eksperymenty i przybliżał najnowsze teorie naukowe. Po wielkim pożarze Londynu w 1666 roku nadzorował wraz ze swoim przyjacielem **Christopherem Wrenem** (1632–1723) dzieło odbudowy miasta. Podobnie jak w przypadku pracy naukowej i tutaj imponujący wkład Hooke'a został z czasem zapomniany. Dziś już nie istnieje wiele z zaprojektowanych przez niego budowli, ale dwa spektakularne przykłady na stałe wpisały się w panoramę miasta. Słynna St Paul's Cathedral była zaprojektowana przez Wrena wspólnie z Hooke'iem, który dodatkowo nadzorował budowę. Również pomnik *The Monument to the Great Fire of London* został zaprojektowany przez Hooke'a. Autor nie przepuścił okazji, żeby uzupełnić swój projekt o funkcję naukową. Pusta w środku kolumna jest w istocie przyrządem pomiarowym, długim solidnym tubusem wycelowanym pionowo w niebo. Przy wykorzystaniu zjawiska paralaksy miał umożliwić Hooke'owi eksperymentalne udowodnienie **ruchu Ziemi dookoła Słońca**. Mniej oczywistą pamiątką po Hooke'u jest wyznaczona przez niego sieć nowych ulic Londynu, w szczególności w dzielnicy City.

Ogrom zobowiązań zawodowych sprawił, że Hooke nie znajdował czasu, żeby precyzyjnie opisać i właściwie opublikować swoje odkrycia. Te zaś często przypisywane były innym, którzy nierzadko zainspirowani przez Hooke'a doprowadzali proces do konkluzji i publikacji. Niektóre jego koncepcje wyprzedzały swój czas tak bardzo, że nawet nadzwyczajna aktywność naukowa XVII wieku nie zachęcała do plagiatu, np. jego pogląd, że **ciepło jest wynikiem niewidzialnych drgań** mikroskopijnych części składających się na ciała materialne. Obecnie kinetyczną teorię ciepła datujemy od przełomowych prac Jamesa Clerka Maxwella (1831–1879). A należy pamiętać, że dopiero na początku XX wieku, m.in. w następstwie pracy Einsteina nad ruchami Browna, kinetyczna teoria awansowała z przydatnego matematycznego modelu opartego na wymyślonych podstawowych cząstkach materii na adekwatny opis rzeczywistości.

W przypadku odkryć bardziej zharmonizowanych ze stanem ówczesnej wiedzy Hooke nie raz musiał bronić swojego pierwszeństwa lub skarżył się publicznie, że jego pomysły zostały skradzione. Zyskał przez to reputację osoby kłótniwej i zadufanej w siebie, co z kolei skłoniło wielu mu współczesnych, jak i przyszłych, badaczy do opinii, że wywody Hooke'a były przechwałkami bez pokrycia. Odkryte w pierwszej połowie XX wieku dzienniki uczonego, a także listy znaczących postaci ówczesnego świata naukowego, takich jak np. Halley, Flamsteed czy Huygens, wskazują jednak, że te twierdzenia nie były na wyrost.

Być może najważniejsze osiągnięcie Hooke'a jest jednocześnie tym, którego autorstwo jest w powszechnej świadomości przypisane jego największemu rywalowi. Mówimy tu o **teorii grawitacji**, nieodłącznie kojarzonej z postacią Isaaca Newtona (1642–1727) i jego magnum opus – *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Zasady matematyczne filozofii naturalnej) – wydanym w 1687 roku.

Robert Hooke pracował nad własną teorią grawitacji przynajmniej od roku 1665, a swoje rozważania wielokrotnie przedstawiał publicznie, w tym w formie

pisemnej (w latach 70.) w tzw. wykładach Cutlerowskich. Krótki opis tej teorii można przeczytać w książce J. Kierula ([6] na stronie 254), same zaś wykłady można bez trudu znaleźć w sieci. Spójrzmy zatem na główne założenia teorii Hooke'a.

1. Wszystkie ciała niebieskie obdarzone są mocą przyciągającą w kierunku swego centrum. Wszystkie ciała niebieskie, w szczególności ciała naszego układu planetarnego, oddziałują na siebie wzajemnie (na ruch każdego mają wpływ wszystkie pozostałe).
2. Wszystkie ciała wprawione w prosty i prostoliniowy ruch będą kontynuować taki ruch po linii prostej, dopóki nie zostaną przez jakieś działające moce odchylone i zmuszone do ruchu po jakiejś złożonej linii krzywej.
3. Moce przyciągające są tym potężniejsze w działaniu, im bliżej ich środka znajduje się ciało, na które działają. Owe moce przyciągające maleją odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości.

Brzmi znajomo, czyż nie? Zwróćmy przede wszystkim uwagę na to, co zawierają powyższe założenia. Pierwsze założenie mówi, że grawitacja jest *powszechna*, i prawidłowo przedstawia działające siły co do ich *kierunku*. Założenie trzecie precyzuje *wartość* siły grawitacji działającej między dwoma ciałami. Założenie drugie jest tzw. pierwszym prawem Newtona, które zresztą za sprawą Galileusza i Kartezjusza było wówczas powszechnie znane.

**Hooke i Newton starli się już w 1671 roku**, ale w innym obszarze badań. Obaj uczeni mieli silną pozycję w świecie nauki. Nazwisko Hooke'a znane było w całej Europie, Newton zaś w wieku zaledwie 27 lat za sprawą rekomendacji Isaaca Barrowa przejął katedrę matematyki w Cambridge. Obu cechowała chorobliwa wręcz ambicja rozszyfrowania wszelkich tajemnic natury. Po szeregu owocnych lat poświęconych matematyce Newton w ramach swoich zobowiązań akademickich pochylił się nad problemami optyki i zadał podstawowe pytanie o samą naturę światła, co rychło doprowadziło do konfliktu z Hooke'iem. Podczas gdy Newton proponował teorię korpuskularną, Hooke obstawał przy teorii falowej. Argumenty podnoszone w tej dyspacie były nie tylko merytoryczne, a po pierwszym spotkaniu pozostał niesmak. Spór zainicjowany przez tych dwóch gigantów nie znalazł rozwiązania za ich życia. Przez długi czas teoria falowa świeciła triumfy, aż do nastania mechaniki kwantowej na początku XX wieku, gdy światło ponownie stało się strumieniem cząstek. Uczeni być może nie weszliby ponownie na kurs kolizyjny, gdyby nie nowa funkcja Hooke'a w The Royal Society. W 1679 roku został on sekretarzem Towarzystwa. Do jego zadań należało utrzymywanie, w imieniu instytucji, korespondencji z wieloma wiodącymi uczonymi, w tym z Newtonem. W liście z 1679 roku Hooke przedstawił Newtonowi swoją teorię dotyczącą grawitacji.

Niewątpliwie Newton rozpoczął swoje badania nad ruchem ciał niebieskich na wiele lat przed otrzymaniem zarysu teorii od Hooke'a. Wydaje się jednak, że to

ów list był decydujący w obraniu przez Newtona nowego kursu w swoich rozważaniach. Jego koncepcje dotyczące teorii grawitacji przed rokiem 1684 były mieszaniną teorii wirów Kartezjusza i sił magnetycznych, co przedstawił w pracach na temat komety z przełomu lat 1680–1681, o której doniósł Newtonowi Królewski Astronom Flamsteed.

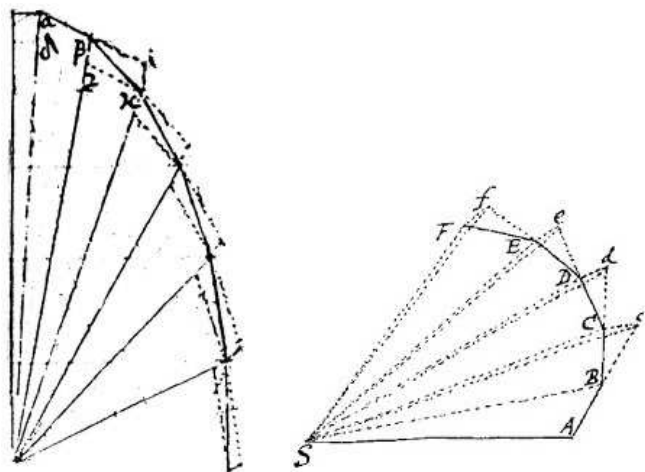


Isaac Newton ok. 1726 roku, u schyłku życia

Wpływ Hooke'a dotyczył nie tylko ogólnego kształtu teorii, ale też technicznych aspektów dowodu matematycznego. I tak Newton przyjął sugestię Hooke'a, że ruch orbitalny jest wynikiem zestawienia ruchu po prostej stycznej z tendencją w stronę źródła siły, którym jest ciało centralne, a **nie – jak chciał Newton – z odchyleniem w kierunku prostopadłym do ruchu i proporcjonalnym do krzywizny trajektorii**. Co więcej, sama metoda dowodu opiera się na promowanym przez Hooke'a pomysle, że siła grawitacyjna to efekt okresowych impulsów emitowanych przez materię, podobnych w charakterze do światła czy dźwięku. Była to idea prawdopodobnie zainspirowana wcześniejszymi badaniami nad falową naturą światła, które też doprowadziły Hooke'a do zapostulowania siły malejącej z kwadratem odległości. W *trójwymiarowej* przestrzeni natężenie światła na sferze o promieniu  $r$  i o środku w punkcie źródła światła jest odwrotnie proporcjonalne do  $r^2$ . Wynika to z tego, że pole sfery jest równe  $4\pi r^2$ . Dowód Newtona pierwszego prawa Keplera, tj. eliptyczności orbit planetarnych, opiera się na aproksymacji zakrzywionej trajektorii przez tor kawałkami liniowy, gdzie proste fragmenty odpowiadają ruchowi bezwładnemu, zaś punkty zmiany kierunku odpowiadają doświadczeniu przez ciało impulsu przyciągającego w stronę centrum siły.

Na marginesie następnej strony zestawiamy ilustrację konstrukcji trajektorii ciała pod wpływem sił centralnych w wykonaniu Newtona (w pracy *De Motu Corporum* z roku 1684) i szkic Hooke'a (z nieopublikowanego manuskryptu datowanego na rok 1685). Pomimo iż istnieje spore prawdopodobieństwo, że Hooke miał szansę zapoznać się z publikacją Newtona – gdy sporządzał swój szkic, na pewno metoda nie była dla

niego żadną nowością, gdyż konstrukcja jest niczym innym aniżeli graficznym przedstawieniem idei, które głosił od lat. Dlaczego Hooke rozważał siłę malejącą liniowo? Wiadomo, że chciał zademonstrować zasadność swojej teorii za pomocą eksperymentu, w którym rolę planety odegrałoby wahadło sferyczne. Siła zmieniająca się liniowo z odległością była aspektem jego badań nad drganiami i sprężystością. Przynajmniej w tym obszarze potomni uczą się o prawie Hooke'a!



Z lewej: aproksymacja trajektorii, ruchu pod wpływem siły malejącej proporcjonalnie do odległości (w wykonaniu Hooke'a).  
Z prawej: aproksymacja trajektorii, ruchu pod wpływem siły malejącej z kwadratem odległości (w wykonaniu Newtona)

Być może gdyby Hooke w ciągu kilku lat poprzedzających korespondencję z Newtonem poświęcił więcej czasu na skrupulatną analizę, mówilibyśmy dzisiaj o teorii grawitacji Hooke'a. Z pewnością możemy powiedzieć, że powszechny pogląd, według którego Hooke'owi brakowało zdolności matematycznych, żeby przekuć swoje hipotezy w bezsporną demonstrację, jest krzywdzący. Być może krokiem, którego mu zabrakło, było umiejętne przejście do granicy z krokiem aproksymacji. Newton z całym swoim doświadczeniem zdobytym przy formułowaniu rachunku różniczkowego był w tym względzie wiodącym ekspertem. Poprawną i bardzo starannie uzasadnioną matematyczną teorię grawitacji przedstawił dopiero w 1687 roku w *Principiach*.

Dlaczego przy wszystkich swych osiągnięciach Hooke zniknął z horyzontu? To fascynująca historia, na którą wpływ miały elementy ludzkie oraz aspekty pozanaukowe. Pewne jest, że decydującym elementem zepchnięcia Hooke'a na margines wielkiej nauki była głęboka i dobrze udokumentowana osobista niechęć Newtona, który w ostatnich latach życia Hooke'a miał dominującą pozycję w środowisku naukowym. Należy wspomnieć, że nie ma w *Principiach* odnośników do roli Roberta Hooke'a w rozwoju teorii grawitacji. Hooke nic nie osiągnął w środowisku związanym z The Royal Society, chociaż protestował. Mało tego, niedługo po jego śmierci Newton został prezesem Towarzystwa. Jednym z jego pierwszych zadań było przeniesienie instytucji do nowej siedziby. Czy (jak twierdzą niektórzy) nowy prezes polecił spalić portret Hooke'a? Czy też (jak

twierdzą inni) nie zadbał o to, żeby portret zawisł w nowej siedzibie? Tego raczej nigdy się nie dowiemy. Do niedawna sądzono, że do naszych czasów nie przetrwał żaden wizerunek uczonego. Dopiero w 2020 roku postać Hooke'a została skojarzona z postacią matematyka namalowaną przez Mary Beale! Będąc gigantem za życia, Newton urósł jeszcze bardziej po śmierci, kiedy jego akolici wynieśli go do pozycji nieomal boskiej.

Historia tego sporu została przez wieki zredukowana do łatwostrawnych uproszczeń, które są sukcesywnie powielane w podręcznikach szkolnych. Do niedawna historycy, prawie bez wyjątku, przedstawiali wkład Hooke'a w teorię grawitacji jako mało istotny. Jego teorię lekceważono, opisywano jako domysły podane bez właściwego uzasadnienia – dopiero Newton podał dowody, twierdzono. Aura Newtona oślepiła. Podobnych historii jest na pewno więcej. Im dalej w przeszłość, tym trudniej oddzielić prawdę od mitów. Aby jednak skierować ten artykuł na bardziej optymistyczne tory, spójrzmy jeszcze na kilka przykładów, gdzie oddany został należny szacunek wizjonerom nauki.

### Wizjonerzy nauki

- W 1650 roku w Sztokholmie zmarł przedwcześnie wielki filozof i matematyk René Descartes. Skrzynia zawierająca jego notatki odesłana została do Francji. W niej znaleziono także sekretny dziennik uczonego. Niektóre wpisy w dzienniku były zaszyfrowane. Historia zapisków Kartezjusza, skopiowanych przez Gottfrieda Leibniza i ostatecznie odkodowanych dopiero w latach 80. ubiegłego wieku, jest niezwykła.



Kartezjusz & Leonhard Euler

Dowiadujemy się z nich, że słynne *twierdzenie o wielościanach Eulera* znane było Kartezjuszowi. Obecnie można już się spotkać z twierdzeniem Eulera–Kartezjusza lub wręcz po prostu *Kartezjusza o wielościanach*. Warto tu zwrócić uwagę, w kontekście oskarżeń wysuwanych pod adresem Hooke'a, że ani Kartezjusz, ani Euler nie udowodnili twierdzenia, a pomimo to ich pionierska rola doceniona została w nomenklaturze.

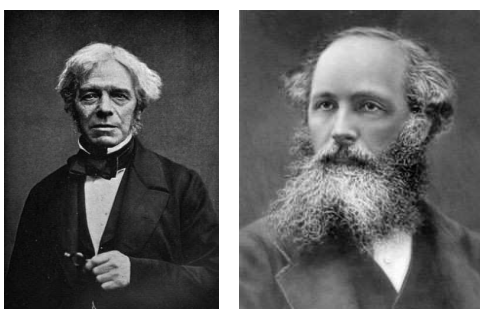
- Michael Faraday był genialnym eksperymentatorem i wizjonerem, którego prace nad elektromagnetyzmem zmieniły świat na zawsze. Nie dokonał on jednak matematyzacji swoich odkryć, która, jak już się przekonaaliśmy, bywa uważana za właściwe ukoronowanie



pracy naukowej. Teorię matematyczną zbudował **James Clerk Maxwell**, który jednak często podkreślał, że szedł za inspirującą wizją Faradaya, i zachęcał do zgłębiania jego prac:

*Faraday jest i musi na zawsze pozostać ojcem elektromagnetyzmu. (...) Aby zrozumieć naukową potęgę Faradaya, najlepsze, co możemy zrobić, to przeczytać pierwszą i drugą serię jego „Researches” oraz porównać je... z całym biegiem nauki o elektromagnetyzmie od tamtej pory, który nie dodał żadnej nowej idei do przedstawionych, a tylko zweryfikował prawdziwość i wartość naukową każdej z nich.*

J. Clerk Maxwell,  
Nature 8 (1873), strony 398 i 400



Michael Faraday & James Clerk Maxwell.

• Od roku 1907 do 1915 **Albert Einstein** pracował nad ogólną teorią względności. Pomimo głębokiego zrozumienia istoty teorii wyprowadzenie prawidłowego równania pola wymagało opanowania skomplikowanego aparatu matematycznego geometrii Riemannowskiej. Latem 1915 roku Einstein odwiedził Getyngę, gdzie podzielił się swoimi przemyśleniami z **Davidem Hilbertem**. Kilka miesięcy później Einstein opublikował ostateczną wersję teorii. Dowiedział się też, że w tym samym czasie Hilbert również napisał pracę zawierającą tożsame równanie pola. Pomimo pewnych napięć Hilbert nie wahał się, żeby wskazać Einsteina jako twórcę ogólnej teorii względności.

*Uzyskane równania różniczkowe opisujące grawitację są według mnie w zgodzie ze wspianą ogólną teorią względności wyłożoną przez Einsteina w jego późniejszych pracach.*

David Hilbert, cytowanie za Corry et al.



Albert Einstein & David Hilbert

• **Srinivasa Ramanujan** (1887–1920) był genialnym indyjskim matematykiem, którego unikalne zdolności dostrzegania prawidłowości teoriolicebowych wykraczają poza ludzkie rozumienie. Znany brytyjski matematyk **Godfrey H. Hardy** zaprosił Ramanujana do współpracy w Cambridge. To, co dla Ramanujana było oczywiste, widoczne gołym okiem, dla Hardy’ego i szerszej społeczności matematycznej było zaskakujące i trudne do udowodnienia. Ramanujan nie zgadywał swoich niezwykłych wzorów, on po prostu spisywał to, co widział wyraźnie. Idea dowodu jako sekwencji prostszych stwierdzeń, prowadzących do uzasadnienia trudniejszej do dostrzeżenia prawdy, mogła mu się wydać dziwna. Ramanujan zmarł w wieku zaledwie 32 lat, ale pozostawił po sobie ogromne dzieło pełne twierdzeń pozbawionych dowodu. Nie ma wątpliwości, że mamy do czynienia z twierdzeniami, a nie hipotezami, a ich autorem jest Ramanujan, a nie autor dowodu w naszym powszechnym rozumieniu. Hardy i inni zajęli się podawaniem precyzyjnych matematycznych dowodów. Ich następcy robią to do dziś, publikując opracowane wyniki w wielotomowej serii *Ramanujan’s Lost Notebook*. Obecnie trwają prace nad tomem szóstym. Zainteresowanych odsyłamy do bardzo dobrego artykułu w Wikipedii (anglojęzycznej).

*Co się tyczy mnie, to trudno mi wyrazić, co zawdzięczam Ramanujanowi – od chwili, gdy go poznałem, jego oryginalność była dla mnie stałym źródłem inspiracji, a jego śmierć jest jednym z najgorszych ciosów, jakich kiedykolwiek doznałem.*

G. H. Hardy, cytowanie za R. Kanigel str. 363.



Srinivasa Ramanujan & Godfrey H. Hardy

• Przekucie słynnej *hipotezy Poincaré’go* w twierdzenie stało się udziałem ekscentrycznego geniusza **Grigorija Perelmana** w pierwszych latach XXI wieku. Wraz z dowodem czekały sława, prestiżowe nagrody i znaczące sumy pieniędzy. Perelman rozczarowany mechanizmami panującymi w globalnej społeczności matematycznej odmówił nie tylko nagród, ale też skrytykował próbę wywyższenia jego wkładu ponad dokonania poprzedników, na których pracy budował, a w szczególności twórcy strategii dowodu opartej na teorii *potoków Ricci’ego* – **Richarda Hamiltona**.

*Krótko mówiąc, główną przyczyną [odmowy przyjęcia Nagrody Milenijnej Instytutu Claya] jest mój sprzeciw wobec zorganizowanej społeczności matematycznej. Nie podobają mi się ich decyzje, uważam je za niesprawiedliwe.*

(...) Uważam, że wkład Richarda Hamiltona w rozwiązanie tego problemu jest niemniejszy niż mój.

G. Perelman,  
1 czerwca 2010 r., cytowanie za agencją Interfax.



Richard Hamilton & Grigoriy Perelman

W fizyce formułuje się nowe hipotezy na podstawie dostępnej wiedzy teoretycznej i eksperymentalnej, wglądu intuicyjnego i przeprowadzonych rachunków, a potem sprawdza się zgodność ustaleń z doświadczeniem. Gdy uzyska się potwierdzające rezultaty dla postulowanych hipotez, te ostatnie stają się fundamentem nowej teorii, którą potem dopracowuje się matematycznie, aby otrzymać dodatkowe relacje. Uzyskane wnioski matematyczne są dalej wskazówką dla

przewidywań i obserwacji nowych, niezauważonych wcześniej zjawisk. Fundamentalna w tym wszystkim jest podstawowa wizja. Powyżej mogliśmy zobaczyć przykłady, w których głęboki wgląd w istotę zagadnienia został mocno zaakcentowany na kartach historii nauki. Możliwe, że przyjdzie czas, gdy nazwisko Hooke'a będzie tak nierozdzielnie związane z klasyczną teorią grawitacji, jak Newtona jest obecnie.

Literatura:

- [1] Vladimir Igorevich Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser 1980.
- [2] Leo Corry, Jürgen Renn, John Stachel, *Belated Decision in the Hilbert–Einstein Priority Dispute*, Science vol. 278, 14 November 1997.
- [3] Robert Hooke's Diary. Nature 135, 297 (1935).
- [4] Stephen Inwood, *The Man Who Knew Too Much. The strange and inventive life of Robert Hooke, 1635–1703*, Macmillan Publishers Ltd, 2002.
- [5] Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, Charles Scribner's Sons, 1991 (Istnieje polski przekład).
- [6] Jerzy Kierul, *Newton*, PIW, 2010.
- [7] Michael Nauenberg, *Robert Hooke's Seminal Contribution to Orbital Dynamics*, Physics in Perspective volume 7, pages 4–34(2005).
- [8] Louise Diehl Patterson, *Hooke's Gravitation Theory and Its Influence on Newton. I: Hooke's Gravitation Theory*, Isis, Nov., 1949, Vol. 40, No. 4 (Nov., 1949), pp. 327-341.
- [9] Louise Diehl Patterson, *Hooke's Gravitation Theory and Its Influence on Newton. II: The Insufficiency of the Traditional Estimate*, Isis, Mar., 1950, Vol. 41, No. 1 (Mar., 1950), pp. 32-45.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1666.** Czy istnieje pięciokąt wypukły, w którym długość każdej przekątnej jest równa długości któregoś z boków?  
Rozwiązanie na str. 14

**M 1667.** Niech  $P$  będzie takim wielomianem stopnia 2000, że wielomian  $P(x^2 - 1)$  ma dokładnie 3400 miejsc zerowych, a wielomian  $P(1 - x^2)$  ma dokładnie 2700 miejsc zerowych. Udowodnij, że pewne dwa miejsca zerowe wielomianu  $P$  różnią się o mniej niż 0,002.  
Rozwiązanie na str. 19

**M 1668.** Dla dowolnej liczby całkowitej  $N \geq 2$  niech  $f(N)$  oznacza sumę  $N$  i największego dzielnika  $N$  (różnego od  $N$ ). Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $A \geq 2$ , iterując wielokrotnie  $f$  na  $A$ , uzyskamy liczbę podzielną przez  $3^{2020}$ .  
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1019.** Jak częstość drgań (wysokość tonu)  $f$  struny zależy od jej długości  $l$ , masy  $m$  i (siły) naciągu  $F$ ?  
Rozwiązanie na str. 15

**F 1020.** Po zakończeniu swojej „misji” i wykonaniu wielu okrążeń Ziemi część satelitów wchodzi w górne warstwy atmosfery i powoli zbliża się do powierzchni Ziemi. Przyjmijmy jako model „spadania” satelity, że siła  $F$  hamująca jego ruch jest postaci  $F = -Av^\alpha$ , gdzie  $v$  jest prędkością satelity, a  $A > 0$  i  $\alpha > 0$  są pewnymi stałymi. Przyjmijmy dalej, że siła  $F$  jest na tyle mała, że podczas ruchu orbita pozostaje w dobrym przybliżeniu orbitą kołową – tzn. po każdym kolejnym obiegu odległość  $r$  satelity od środka Ziemi maleje bardzo niewiele w porównaniu z  $r$ . Jak w naszym modelu prędkość zbliżania się satelity do Ziemi zależy od odległości  $r$ ?  
Rozwiązanie na str. 16

