

O przybliżaniu uławkami

Wojciech CZERWIŃSKI

Jak dobrze można przybliżyć uławkami liczbę rzeczywistą, na przykład liczbę π ? Większość Czytelników zapewne wie, że można znaleźć ułamki (lub inaczej mówiąc liczby wymierne) dowolnie bliskie liczbie π . Takie coraz lepiej przybliżające ułamki to na przykład: $\frac{3}{1}$, $\frac{31}{10}$, $\frac{314}{100}$, $\frac{3141}{1000}$, $\frac{31415}{10000}$ itd. Nietrudno zauważyć, że tak samo można łatwo przybliżyć liczbę $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, e i dowolną inną liczbę rzeczywistą. Tę własność liczb wymiernych nazywa się *gęstością*. Istotnie, oznacza ona, że liczby wymierne są tak gęsto rozłożone wśród rzeczywistych, że wszędzie ich pełno – dowolną liczbę rzeczywistą można dowolnie dobrze przybliżyć.

Co jednak się stanie, jeśli zapytamy o przybliżanie uławkami o mianownikach ograniczonych przez pewną liczbę? Przykładowo – jak dobrze można przybliżyć liczbę π przez ułamki o mianowniku co najwyżej 1000? Czy da się to zrobić z dokładnością lepszą niż $\frac{1}{1000}$? Okazuje się, że tak! Znajdzie się wśród nich taki, który przybliży π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Jednak w ogólności nie da się tego zrobić o wiele lepiej, o czym za chwilę. Co więcej, ta gałąź matematyki jest intensywnie badana, zawiera wiele głębokich rezultatów i jeszcze więcej od lat otwartych problemów. Wiąże się też zadziwiająco z wieloma pozornie niezwiązanymi dziedzinami. Ja osobiście trafiłem na nią poprzez moje badania naukowe dotyczące problemu dodawania wektorów, które opisywałem w Δ_{20}^{11} . Ten kierunek naprowadził mnie na rozważania nad liniowymi ciągami rekurencyjnymi, czyli ciągami będącymi w pewnym sensie uogólnieniem sławnego ciągu Fibonacciego. Okazuje się, że niektóre problemy dla liniowych ciągów rekurencyjnych wiążą się mocno z przybliżaniem liczb rzeczywistych liczbami pewnej specyficznej postaci (konkretnie liczbami algebraicznymi, które można uznać za uogólnienie uławków).

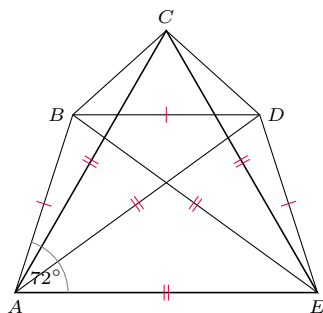
Liczba rzeczywista jest algebraiczna, gdy jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Wróćmy jednak do tematu. Powyżej wspomniałem, że liczbę π można przybliżyć z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ ułamkiem o mianowniku wynoszącym co najwyżej 1000. Jest to przypadek szczególny twierdzenia Dirichleta o aproksymacji, które sformułujemy w następującej wersji:

Twierdzenie 1 (Dirichleta). *Dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej $x \in \mathbb{R}^+$ oraz liczby naturalnej $N \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby naturalne $p, q \in \mathbb{N}$, że $q \leq N$ oraz $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$.*



Rozwiązanie zadania M 1666. Istnieje. Rozpatrzmy trójkąt równoboczny ACE oraz taki trapez $ABDC$, że $\sphericalangle EAB = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $AD = BE = AE$ (patrz rysunek).



Wtedy też $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEA = 72^\circ$ oraz $\sphericalangle EAD = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. Zatem $\sphericalangle BDA = \sphericalangle EAD = 36^\circ$ oraz $\sphericalangle DAB = 72^\circ - 36^\circ$, więc $AB = BD$. Łatwo zauważyć, że pięciokąt wypukły $ABCDE$ spełnia warunki zadania.

Równie dobrze moglibyśmy sformułować to twierdzenie dla dowolnej liczby rzeczywistej (niekoniecznie dodatniej), ale wtedy musielibyśmy brać pod uwagę $p, q \in \mathbb{Z}$, które mogą być ujemne. Stąd dla uproszczenia kwestii technicznych skupimy się na liczbach dodatnich. Dowód jest wyjątkowo prosty i korzysta z zasady szufladkowej Dirichleta, która była właśnie przez Petera Dirichleta spopularyzowana, i stąd jej polska nazwa (po angielsku nazywa się *pigeonhole principle*, gdzie *pigeonhole* oznacza przegródkę na dokumenty).

Dowód. Oczywiście nierówność $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN}$ jest równoważna tej samej nierówności pomnożonej stronami przez q , czyli $|qx - p| < \frac{1}{N}$. Skupimy się na dowodzeniu tej ostatniej. A zatem tak naprawdę chcemy pokazać, że istnieje taka wielokrotność qx liczby x , gdzie $q \leq N$, że qx jest odległe od liczby całkowitej nie więcej niż o $\frac{1}{N}$. Rozważmy liczby $0, x, 2x, 3x, \dots, (N-1)x, Nx$ i ich części ułamkowe. Tych części ułamkowych jest $n+1$ i wszystkie należą do przedziału $[0, 1)$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwie z nich wpadną do tego samego spośród N przedziałów $[0, \frac{1}{N}), [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}), \dots, [\frac{N-1}{N}, 1)$. Jeśli części ułamkowe ix oraz jx wpadają do tego samego przedziału dla pewnych $i, j \in \{0, \dots, N\}$, $i < j$, to mamy $-\frac{1}{N} < (j-i)x - p < \frac{1}{N}$, a co za tym idzie $|(j-i)x - p| < \frac{1}{N}$ dla pewnej liczby $p \in \mathbb{N}$. Kładąc $q = j-i$, kończymy dowód. \square

Zauważmy, że powyższy dowód jest niekonstruktywny w tym sensie, że nie bardzo widać, jak znaleźć ułamek przybliżający π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$ inaczej niż naiwnie. Można oczywiście przeglądać wszystkie wielokrotności π , tzn. $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, 1000\pi$, i badać ich części ułamkowe bądź też przeglądać wszystkie możliwe ułamki o mianownikach ograniczonych przez 1000, ale te sposoby są mało efektywne. Okazuje się jednak, że ma miejsce bardzo ciekawy fakt: najlepsze takie przybliżenia uzyskujemy, rozwijając przybliżaną liczbę w ułamek łańcuchowy. O tym fenomenie pisaliśmy w Δ_{18}^7 , tutaj niestety nie ma miejsca, żeby choć pokrótce wyjaśnić, skąd się to bierze. Niemniej jednak bardzo zachęcam Czytelników do zgłębienia tego zaskakującego faktu. Jako ciekawostkę możemy pokazać, jak korzystając z ułamków łańcuchowych, znaleźć dobre przybliżenie liczby π . Największą liczbą naturalną przybliżającą π od dołu jest 3, więc nasz ułamek będzie postaci $3 + \frac{1}{x}$, natomiast $\pi = 3 + (\pi - 3)$. Warto zatem zrozumieć, ile wynosi $\frac{1}{\pi-3}$, aby wiedzieć, co ma przybliżać x . Łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{\pi-3} \approx 7,062$, więc warto wziąć $x = 7$. Wówczas ułamek łańcuchowy $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3,14285\dots$ już dość dobrze przybliża π , ale możemy iść dalej. Niech więc $x = 7 + \frac{1}{y}$, wówczas nasze przybliżenie będzie postaci $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{y}}$. Żeby zobaczyć, co ma przybliżać y , obliczmy, że $\frac{1}{\frac{1}{\pi-3}-7} \approx 15,9966$. A zatem świetnym przybliżeniem π powinno być $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3 + \frac{15}{106} = \frac{333}{106} \approx 3,1415094\dots$ Idąc tym tropem, uzyskalibyśmy następną przybliżenie równe $\frac{355}{113} \approx 3,141592920\dots$ To już ostatnie przybliżenie o mianowniku mniejszym niż 1000 i faktycznie, jak widzimy, przybliża ono π z dokładnością do $\frac{1}{1\,000\,000}$. Potem oczywiście dostalibyśmy jeszcze lepsze przybliżenia π , ale tu się zatrzymajmy.

Zauważmy, że twierdzenie Dirichleta łatwo implikuje następujący wniosek:

Wniosek. Dla każdej niewymiernej liczby rzeczywistej dodatniej $x \in \mathbb{R}^+$ istnieje nieskończenie wiele takich ułamków $\frac{p}{q}$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Istotnie, wyobraźmy sobie, że mamy już skończenie wiele takich przybliżeń, i chcemy znaleźć kolejne. Ponieważ liczba x jest niewymierna, to każde przybliżenie ma pewien błąd, istnieje więc też najlepsze dotychczas znalezione przybliżenie. Niech najlepsze z dotychczasowych przybliżeń będzie gorsze niż $\frac{1}{N}$ dla pewnego N . Z twierdzenia Dirichleta otrzymujemy, że istnieje taki ułamek $\frac{p}{q}$ dla $q \leq N$, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{N}$, a więc ułamek ten nie jest żadnym z dotychczasowych. Ponadto $1/(qN) < 1/q^2$, zatem faktycznie dostajemy nowe przybliżenie. Kontynuując w ten sposób, możemy ich dostać nieskończenie wiele.

Bardzo naturalne jest pytanie, czy we wniosku nie dałoby się poprawić liczby 2 w wykładniku. Może można uzyskiwać przybliżenia z dokładnością do $\frac{1}{q^3}$, albo przynajmniej do $\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Okazuje się jednak, że nie, że liczba 2 jest optymalna, i stosunkowo łatwo to pokazać. Rozważmy wykładnik $C \in \mathbb{R}$ i przybliżanie liczb $x \in [0, 1]$. Zobaczymy, ile liczb może być przybliżonych ułamkiem $\frac{p}{q}$ z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$. Będą to ułamki w przedziale $[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^C}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^C}]$, a więc w przedziale o długości $2\frac{1}{q^C}$. Takich ułamków o mianowniku q w przedziale $[0, 1]$ jest co najwyżej $q + 1$, a więc długość przedziałów liczb przybliżanych dobrze (z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$) przez te ułamki to co najwyżej $2(q + 1)\frac{1}{q^C} \leq 4q\frac{1}{q^C} = \frac{4}{q^{C-1}}$. Jeśli każda liczba niewymierna z przedziału $[0, 1]$ miałyby być dobrze przybliżona nieskończenie wiele razy, to suma długości przedziałów dobrze przybliżanych przez ułamki o mianowniku q przesumowana po wszystkich możliwych $q \in \mathbb{N}$ musiałaby być nieskończona. Mamy jednak $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{4}{q^{C-1}} < \infty$ dla $C > 2$, co pokazuje, że nie każda liczba rzeczywista da się dobrze przybliżać ułamkami, gdzie przez dobrze rozumiemy przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{q^C}$ dla $C > 2$.

Można jednak powiedzieć: zgoda, nie każda liczba da się dobrze przybliżyć dla $C > 2$, ale jednak pewne liczby dadzą się dobrze przybliżyć. Przykładowo



Rozwiązanie zadania F 1019.

Postać zależności częstości drgań struny od jej masy, długości i naciągu najłatwiej znaleźć, posługując się analizą wymiarową. Przyjmujemy, że:

$$f \propto l^\alpha m^\beta F^\gamma,$$

gdzie symbol \propto oznacza proporcjonalność. Wymiar wyrażenia po prawej stronie proporcjonalności musi być równy wymiarowi częstości, $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$ – symbol $[\cdot]$ oznacza tu „pobranie” wymiaru wielkości w nawiasie kwadratowym. Wypiszmy wymiary wielkości po prawej stronie: $[l] = 1 \text{ m}$, $[m] = 1 \text{ kg}$, $[F] = 1 \text{ N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Każda z jednostek, po obu stronach proporcjonalności, musi występować w tej samej potęgze. Warunek ten prowadzi do układu równań:

$$\begin{aligned} -2\gamma &= -1, \\ \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu są: $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Otrzymujemy zależność:

$$f \propto \sqrt{\frac{Fl}{m}}.$$

Jak widać, właściwości materiału, z jakiego wykonana jest struna, nie mają znaczenia dla wysokości jej tonu podstawowego. Rodzaj materiału ma natomiast wpływ na barwę dźwięku (proporcje nateżeń wyższych składowych) i komfort gry palcami, np. na gitarze. Ma także wpływ na siłę naciągu dla tego samego tonu – stal wymaga większej siły niż nylon i stąd struny nylonowe montuje się często do starych instrumentów.



Rozwiązanie zadania F 1020.

Jeśli orbita pozostaje przez cały czas bardzo bliska orbicie kołowej, to znaczy, że w każdym punkcie toru promień wodzący jest z dobrym przybliżeniem prostopadły do chwilowej prędkości v satelity, i możemy rozpatrywać równowagę sił jak dla orbity kołowej (siła F jest bardzo mała w porównaniu z siłą grawitacji). Niech satelita ma masę m . Oznaczmy iloczyn stałej grawitacyjnej G i masy Ziemi M jako $\gamma = GM$. Dla orbity kołowej zachodzi związek:

$$\frac{\gamma m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Otrzymujemy zależność:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{r}}.$$

Energia całkowita wynosi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma m}{r} = -\frac{\gamma m}{2r}.$$

Energia całkowita maleje pod wpływem działania siły $F = -A v^\alpha$ z szybkością równą mocy $F \cdot v = -A v^{\alpha+1}$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma m}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -A \left(\frac{\gamma}{r}\right)^{(\alpha+1)/2}.$$

Ostatecznie szukana prędkość zmiany odległości od Ziemi wynosi:

$$\frac{dr}{dt} = -2 \frac{A}{m} \gamma^{(\alpha-1)/2} r^{(3-\alpha)/2}.$$

Dla $\alpha = 3$ prędkość zbliżania się do Ziemi byłaby stała. Należy jednak pamiętać, że wraz ze zmniejszaniem się r rośnie gęstość atmosfery, a więc nawet przy zachowaniu postaci zależności F od v powinniśmy do naszego modelu wprowadzić zależność współczynnika A od r .

Bardzo polecam blog Terrence Tao, w szczególności jego porady dotyczące kariery matematycznej na różnych poziomach zaawansowania (zaczynając od szkoły podstawowej): terrytao.wordpress.com/career-advice/

liczby wymierne przybliżane są idealnie przez liczby wymierne (liczba przybliża idealnie samą siebie). Wiadomo też, że istnieją liczby niewymierne, które są bardzo dobrze przybliżane liczbami wymiernymi. W 1840 roku francuski matematyk Joseph Liouville'a podał prosty przykład takiej liczby, zwanej teraz stałą Liouvillea. Zdefiniował on

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,11000100000000 \dots$$

W liczbie L , w rozwinięciu dziesiętnym jedynek stoją na pozycjach $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ itd. po przecinku. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$, gdy weźmiemy $m = k!$ i obetniemy rozwinięcie L na m -tej cyfrze po przecinku (która to jest jedynką), to potem następuje $(k+1)! - k! - 1 = k \cdot k! - 1$ zer. A zatem to obcięcie jest bardzo dobrym przybliżeniem L , ułamkiem o mianowniku 10^m przybliżającym L z dokładnością przynajmniej $(\frac{1}{10^m})^k$. Widać więc, że L może być przybliżone z dokładnością do $\frac{1}{q^k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ nieskończenie wiele razy (obcięciem po k -tej jedynce, $(k+1)$ -szej jedynce, $(k+2)$ -giej jedynce itd.). Co ciekawe, w 1844 roku Liouville wykazał, korzystając właśnie z własności dobrego przybliżania, że L jest liczbą przestępną (inaczej niealgebraiczną), czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych (jak np. $\sqrt[3]{7}$ czy $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Była to w ogóle pierwsza liczba, dla której udało się wykazać, że jest przestępna.

Jak wiele więc jest takich liczb i jaką mają one postać? Tu zaczynają się schody. Okazuje się, że prawdą jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 (Thue–Siegel–Roth). *Dla każdej niewymiernej liczby algebraicznej x oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieje tylko skończenie wiele par $p, q \in \mathbb{N}$ takich, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$.*

Zauważmy, że twierdzenie to w szczególności implikuje, że liczba L jest przestępna. Jego historia jest bardzo długa. W 1909 roku udowodnił je Axel Thue, przy czym zamiast wykładnika $2 + \varepsilon$ był wykładnik $d/2 + 1 + \varepsilon$. Tutaj d to stopień liczby algebraicznej, czyli minimalny stopień wielomianu o współczynnikach całkowitych takiego, że dana liczba algebraiczna jest jego pierwiastkiem. Przykładowo stopień liczby $\sqrt[5]{13}$ to 5, bo jest pierwiastkiem $x^5 - 13$ (a innego takiego wielomianu o mniejszym stopniu nie ma), a stopień liczby $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ to 2, bo jest ona pierwiastkiem $x^2 - x - 1$. Następnie Carl Ludwig Siegel poprawił wykładnik do $2\sqrt{d} + \varepsilon$, Freeman Dyson do $\sqrt{2d} + \varepsilon$ w 1947 roku, aż w końcu brytyjski matematyk Klaus Roth udowodnił je w roku 1955 w ostatecznej formie dla wykładnika $2 + \varepsilon$. Właśnie za ten wynik Roth otrzymał najwyższe możliwe odznaczenie matematyczne, w 1958 roku uhonorowano go Medalem Fieldsa. Techniki, których używano, to rozważanie wielomianów wielu zmiennych (liczba zmiennych zależy od ε). Niestety w *Delcie* jest zdecydowanie za mało miejsca, żeby je przedstawić.

O przybliżaniu liczb rzeczywistych ułamkami albo, co też ciekawe, liczbami algebraicznymi można powiedzieć jeszcze bardzo wiele. Stoi za tą dziedziną głęboka matematyka, a wiele kwestii wciąż jest niezrozumianych. Przykładowo za twierdzenie Bakera, które mówi o pewnego rodzaju przybliżaniu liczbami algebraicznymi, przyznano w 1970 roku Medal Fieldsa. Dzięki temu twierdzeniu możemy udowodnić tak naturalny fakt, jak to, że równanie $2^x - 3^y = 2021$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań (i liczby 2, 3 oraz 2021 nie są tu w niczym szczególne, oprócz tego, że proste liczenie modulo nie ogranicza rozwiązań). Ja osobiście nie wiem, jak i czy można to wykazać bez twierdzenia Bakera, być może Czytelnicy znajdą alternatywne rozwiązanie. O szacowaniu różnicy $|2^x - 3^y|$ oraz twierdzeniu Bakera ciekawie pisze na swoim blogu Terrence Tao, przez wielu uznany za aktualnie najlepszego matematyka na świecie: terrytao.wordpress.com/2011/08/21/hilberts-seventh-problem-and-powers-of-2-and-3/. Tego typu rozważania to jednak temat na zupełnie inną opowieść.