Teraz wykażemy, że $f(X) = X$. Niech więc $y \in X$. Zatem $y = g^k(w)$ dla pewnego $k \geqslant 0$ oraz $w \in \mathbb{Q}$. Połóżmy $x := g(y)$. Wówczas $f(x) = f(g(y)) = y$ oraz $x = g^{k+1}(w) \in X$.

Wreszcie wykażemy, że $f : X \to X$ jest różnowartościowa. Niech więc $x_1, x_2 \in X$ oraz załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$. Oznaczmy tę wspólną wartość przez a. Możemy napisać

$$x_1 = g^k(w_1), \quad x_2 = g^m(w_2), \quad \text{gdzie } k \geqslant 0, m \geqslant 0, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}.$$

Jeżeli obie liczby k, m są dodatnie, to

$$f(x_1) = f(g^k(w_1)) = g^{k-1}(w_1), \quad f(x_2) = f(g^m(w_2)) = g^{m-1}(w_2),$$

czyli $g^{k-1}(w_1) = g^{m-1}(w_2)$. Otrzymujemy stąd

$$x_1 = g^k(w_1) = g(g^{k-1}(w_1)) = g(g^{m-1}(w_2)) = g^m(w_2) = x_2.$$

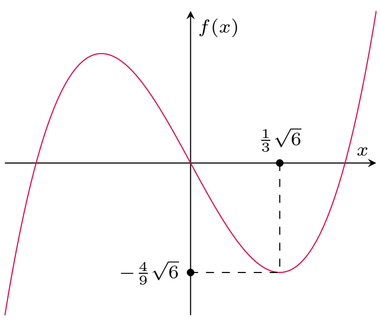
Rozpatrzymy przypadek $k = 0$, $m > 0$. Teraz $x_1 \in \mathbb{Q}$ oraz

$$f(x_1) = g^{m-1}(w_2).$$

Z określenia funkcji g mamy teraz $x_1 = g(g^{m-1}(w_2))$, czyli $x_1 = x_2$.

W ostatnim przypadku $k = m = 0$ powołujemy się na wykazaną wcześniej różnowartościowość funkcji $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ i otrzymujemy $x_1 = x_2$.

Zajmiemy się na koniec funkcją $g : X \to X$ pod kątem jej ciągłości w różnych punktach. Jest to funkcja odwrotna do „gładkiej" bijekcji $f : X \to X$. Faktycznie funkcja $f : X \to X$ jest ciągła, ale nazwaliśmy ją „gładką", gdyż jest obcięciem do X wielomianu trzeciego stopnia! Wykażemy natomiast, że g nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$!



Standardowymi metodami analizy matematycznej można uzasadnić, że $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ jest najmniejszą wartością f na dodatniej półprostej, przyjmowaną dla argumentu $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Łatwo wynika stąd, że dla dowolnego $y \in X \cap (-\frac{4}{9}\sqrt{6}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$ istnieją $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ takie, że $x_1 < -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ oraz $x_2 > \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Oczywiście $x_1 < x_2$ oraz $f(x_1) = f(x_2) = y$. Niech teraz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_1, natomiast $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem o wyrazach wymiernych zbieżnym do x_2. Ponieważ f jest wszędzie ciągła, więc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_1) = y$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_2) = y$. Mamy dalej

$$\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n = x_1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} g(f(b_n)) = \lim_{n\to\infty} b_n = x_2,$$

czyli, na mocy definicji Heinego, g nie może być ciągła w y.

Wyszło na to, że zwykła bijekcja $f : X \to X$ ma dość niezwykłą bijekcję odwrotną g – ale moderując zaistniałą sytuację w duchu tytułu, uspokójmy Czytelników: *konstruując funkcję g, nie skorzystaliśmy nawet z pewnika wyboru!*

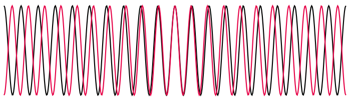
Matematyczny kącik muzyczny IV: O tym, jak przydatne jest dudnienie

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

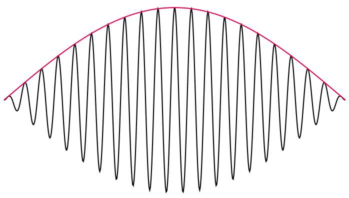
*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W numerze Δ^8_{20} omówiliśmy sposoby strojenia instrumentów, jakie ludzkość opracowała na przestrzeni wieków. Ta część problemu jest natury koncepcyjnej i daje się cała opisać na kartce papieru. Ostatecznie jednak chcemy, by stojący obok nas instrument (na przykład fortepian) był nastrojony, a sama kartka papieru zapisana obliczeniami, jak potrzebne by one nie były, nie rozwiąże za nas tego problemu. Żyjemy w czasach, w których dostępne są urządzenia elektroniczne oraz przeróżne aplikacje wspomagające nas w strojeniu instrumentów, najczęściej gitary. Pojawia się pytanie: w jaki sposób radzono sobie w czasach, gdy takich „wspomagaczy" nie było?

Oczywiście muzycy mają statystycznie lepszy słuch i są wrażliwsi na różnice pomiędzy dźwiękami. Dlatego dużo łatwiej jest im zbliżyć się do zgodnego brzmienia. Gdy różnica pomiędzy częstotliwościami obu dźwięków jest jednak niewielka, nawet wprawne ucho może mieć trudności z jej wychwyceniem. W tej sytuacji wykorzystuje się tzw. *zjawisko dudnienia.*



Rys. 1. Fale opisane funkcjami φ i ψ



Rys. 2. Fala $\varphi + \psi$ oraz fala o częstotliwości $\frac{|f_1 - f_2|}{2}$ (oznaczona kolorem)

Rozważmy dwie fale opisane funkcjami $\varphi(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, $\psi(t) = \cos(2\pi f_2 t)$ z jednakową amplitudą jednostkową oraz małą różnicą częstotliwości. Wówczas brzmiąc razem, fale te nakładają się i tworzą falę

$$\varphi(t) + \psi(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right).$$

Ludzkie ucho odbiera to jako dźwięk o częstotliwości $\frac{f_1+f_2}{2}$, który *dudni*, czyli jest na przemian głośny i cichy. Jest tak dlatego, że częstotliwość $\frac{|f_1-f_2|}{2}$ jest bardzo mała i wchodzi w zakres infradźwięków.

Prosty stąd wniosek – im mniejsza różnica pomiędzy częstotliwościami dźwięków, tym rzadsze są dudnienia. Celem stroiciela jest zatem takie regulowanie wysokości jednego z dźwięków, by ostatecznie dudnienia się pozbyć, a im rzadziej dudnienia słyszy, tym bliżej jest tego celu.

Tak stroi się chociażby organy – do każdego klawisza przypisane są liczne piszczałki, każda charakteryzująca się osobną barwą. Zbiór piszczałek o tej samej barwie nazywamy *głosem organowym*. Chcąc więc nastroić jeden z głosów, porównuje się go z innym, korygując wysokości dźwięków piszczałek w podany powyżej sposób.

Głosy w organach mają różnorakie *stopaże*. Stopaż to długość najniżej grającej piszczałki w danym głosie wyrażona w stopach (1 stopa to około 30,5 cm). Głosy ośmiostopowe ($8'$) to głosy, które grają realną wysokość dźwięku, przypisaną do konkretnego klawisza. Głosy $4'$ grają oktawę wyżej, głosy $2\frac{2}{3}'$ oktawę i kwintę wyżej, a głosy $16'$ oktawę niżej.

Posługując się dudnieniem, wykorzystuje się też inne ważne zjawisko – alikwoty (omówione pokrótce w odcinku w Δ^7_{20}). Jako że dźwięki znajdujące się w interwale kwinty czystej mają wspólny alikwot (trzeci niższego dźwięku pokrywa się z drugim wyższego), strojenie takiego interwału polega na wyeliminowaniu dudnienia spowodowanego różnicą pomiędzy ww. alikwotami. W analogiczny sposób stroi się interwały oktawy czystej i tercji wielkiej, jako naturalnie występujące w szeregu alikwotowym. Dzięki temu zjawisko dudnienia można wykorzystać do strojenia instrumentów smyczkowych, fortepianu oraz alikwotowych głosów w organach.

Przy strojeniu w systemie równomiernie temperowanym taktyka jest trochę inna – celem nie jest całkowite wyeliminowanie dudnienia, ale nadanie mu odpowiedniej częstotliwości. Rozważmy dźwięki $a^1 = 440\,\mathrm{Hz}$ oraz $e^2 = 659{,}255\,\mathrm{Hz} = (\sqrt[12]{2})^7 \cdot 440\,\mathrm{Hz}$. (O tym, skąd wziął się $\sqrt[12]{2}$, można przeczytać w Δ^8_{20}.) Trzeci alikwot dźwięku a^1 to $e^3_{a^1} = 440\,\mathrm{Hz} \cdot 3 = 1320\,\mathrm{Hz}$, natomiast drugi alikwot dźwięku e^2 to $e^3_{e^2} = 659{,}255\,\mathrm{Hz} \cdot 2 = 1318{,}51\,\mathrm{Hz}$. Wobec tego wzmocnienia fali będą pojawiać się co $\frac{1}{1320-1318{,}51} = 0{,}67$ sekundy. Należy oczywiście zadbać dodatkowo o to, by różnica dźwięków była „w dobrą stronę”.

Korektę naprężenia struny w gitarze, skrzypcach czy fortepianie bardzo łatwo sobie wyobrazić. W instrumentach dętych strojenie (do fortepianu lub orkiestry) polega na zmianie długości piszczałki, czyli wysunięciu lub wsunięciu ruchomej części, w którą się dmie – w przypadku fletu poprzecznego jest to główka, a w przypadku oboju czy fagotu – stroik.

Jak jednak stroi się organy, które przecież też są instrumentem dętym? Techniki są przeróżne. Piszczałka może mieć na samej górze z tyłu wycięty mały pasek, który można odginać na zewnątrz lub do wewnątrz, co przypomina otwieranie i zamykanie konserwy. Podobnie, piszczałka może być przykryta u góry i ten „daszek” można delikatnie odginać. Innym sposobem jest poszerzanie lub zwężanie średnicy piszczałki u jej wylotu – do tego celu stosuje się stożek, który albo nakłada się na piszczałkę jak czapeczkę, zwężając wylot, albo czubkiem do wewnątrz, by wylot poszerzyć. Odwinięcie części piszczałki oraz poszerzenie wylotu skutkują podwyższeniem dźwięku, a operacje odwrotne – jego obniżeniem. W przypadku tzw. głosów językowych, czyli takich, których dźwięk powstaje wskutek drgań cieniutkiej blaszki znajdującej się wewnątrz piszczałki (tzw. języka), strojenie polega na korekcie długości tej blaszki.

Ot i nastrojone. Gdyby jednak coś poszło nie tak, albo coś się rozstroiło w trakcie gry, niektórzy instrumentaliści – jak na przykład skrzypkowie – mogą sobie jeszcze poradzić na bieżąco. W przypadku skrzypków będzie to przyciskanie struny w lekko przesuniętych miejscach.