Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2021

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: **deltami.edu.pl**

Zadania z matematyki nr 817, 818

Redaguje Marcin E. KUCZMA

817. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątami ostrymi przy wierzchołkach A, C. Punkty K, L (w jego płaszczyźnie) są wyznaczone przez warunki prostopadłości $DA \perp AK$, $DB \perp BK$, $DB \perp BL$, $DC \perp CL$. Proste AK i CL przecinają się w punkcie M. Dowieść, że proste styczne w punktach K, L do okręgu opisanego na trójkącie KLM przecinają się w punkcie D.

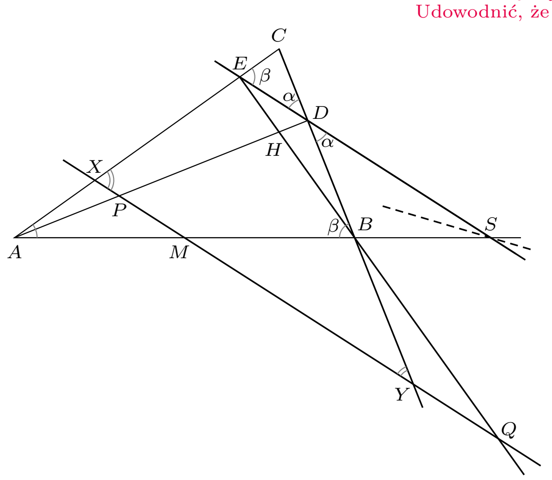
818. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 9$ istnieje taka liczba naturalna $m \leqslant n/3$, że różnica $2^n - 2^m$ jest podzielna przez n.

Zadanie 818 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2020

Przypominamy treść zadań:

809. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H. Proste AB i DE przecinają się w punkcie S. Prosta przechodząca przez środek M boku AB i równoległa do dwusiecznej kąta ASE przecina proste CA, CB, HA, HB, odpowiednio, w punktach X, Y, P, Q. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach CXY i HPQ są przystające.



810. Dla permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ rozważamy liczby:

$$s_k = x_1 + \ldots + x_k \quad \text{oraz} \quad t_k = k + x_k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ udowodnić, że permutacja o własności:

(i) liczby $s_1, \ldots, s_n$ dają różne reszty z dzielenia przez n

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje permutacja o własności:

(ii) liczby $t_1, \ldots, t_n$ dają różne reszty z dzielenia przez n.

809. Skoro proste AB i DE przecinają się, kąty $\alpha = \sphericalangle CAB$ i $\beta = \sphericalangle ABC$ nie są równe. Nie tracąc ogólności, przyjmijmy, że $\alpha < \beta$; rozważane punkty są położone jak na rysunku. Z podobieństwa $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ wynika proporcja $AC : DC = BC : EC$; a z niej – podobieństwo $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Zatem $\sphericalangle DEC = \beta$, $\sphericalangle CDE = \alpha$, i w konsekwencji $\sphericalangle BSD = \beta - \alpha$. Połowa tego kąta to kąt między prostymi AB i XY; tak więc $\sphericalangle AMX = \sphericalangle BMY = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

Spojrzenie na kąty zewnętrzne trójkątów AMX i BMY pokazuje, że

$$\sphericalangle CXM = \sphericalangle CAM + \sphericalangle AMX = \alpha + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$
$$\sphericalangle CYM = \sphericalangle CBM - \sphericalangle BMY = \beta - \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Wobec tego $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BYQ = 180^\circ - \sphericalangle BYM$ i ze wzoru sinusów (w trójkątach AMX i BMY):

$$\frac{AX}{AM} = \frac{\sin \sphericalangle AMX}{\sin \sphericalangle AXM} = \frac{\sin \sphericalangle BMY}{\sin \sphericalangle BYM} = \frac{BY}{BM}.$$

Stąd $AX = BY$. Teraz równość $\sphericalangle AXP = \sphericalangle BYQ$ wraz ze spostrzeżeniem, że kąty przy wierzchołkach A i B w trójkątach APX i BQY są oba równe $90^\circ - \sphericalangle BCA$, prowadzi do wniosku, że te trójkąty są przystające. Tak więc $PX = QY$; a stąd $PQ = XY$.

Promienie okręgów opisanych na trójkątach CXY oraz HPQ wyrażają się wzorami

$$\frac{XY}{2\sin \sphericalangle XCY} \quad \text{oraz} \quad \frac{PQ}{2\sin \sphericalangle PHQ}.$$

A ponieważ $\sphericalangle PHQ = \sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle XCY$, promienie te są równe – co było dane do udowodnienia.

810. Załóżmy, że $(x_1, \ldots, x_n)$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o własności (i). Dla $j > 1$ sumy s_{j-1} oraz s_j mają dawać różne reszty (mod n), więc $x_j = s_j - s_{j-1}$ nie dzieli się przez n; zatem w ciągu $(x_1, \ldots, x_n)$ liczbą równą n jest x_1. Przy tym $x_1 = s_1$, więc s_n już przez n się nie dzieli. A ponieważ $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że n jest liczbą parzystą.

Na odwrót, dla parzystego n ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach

$$x_i = \begin{cases} n + 1 - i & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ i - 1 & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases}$$

wyznacza ciąg sum $(s_1, \ldots, s_n)$ o wyrazach

$$s_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(k+1)n - \frac{1}{2}(k-1) \equiv n - \frac{1}{2}(k-1) \pmod n & \\ & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ \frac{1}{2}k(n+1) \equiv \frac{1}{2}k \pmod n & \text{dla } k \text{ parzystych} \end{cases}$$

– łatwe przeliczenie; i równie łatwe sprawdzenie, że $s_k - s_l$ nie dzieli się przez n, gdy $k \neq l$; wskazana permutacja $(x_1, \ldots, x_n)$ ma własność (i). [Ilustracja dla $n = 8$: $(x_1, \ldots, x_8) = (8, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7) \mapsto$ $\mapsto (s_1, \ldots, s_8) = (8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4) \pmod 8$].

Zatem permutacja o własności (i) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Pozostaje wykazać, że w przypadku własności (ii) ma miejsce charakteryzacja przeciwna.

Gdy permutacja $(x_1, \ldots, x_n)$ ma własność (ii), wówczas (mod n): $\sum t_k \equiv \sum k = s_n$ (sumowania po $k = 1, \ldots, n$). Ale jednocześnie $\sum t_k = \sum k + \sum x_k \equiv 2 \sum k = 2s_n$. Stąd $s_n \equiv 0 \pmod n$; skoro $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, znaczy to, że liczba n jest nieparzysta.

I na odwrót, dla nieparzystego n przykładową permutacją o własności (ii) może być ciąg $(1, \ldots, n)$. Uzyskane równoważności dowodzą tezy zadania.

Klub 44 F

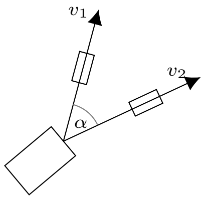
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2021

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 714, 715

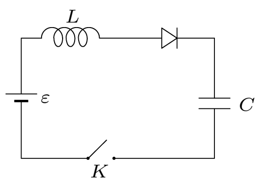
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

714. Ciężka skrzynia przesuwana jest przy pomocy dwóch traktorów, które poruszają się z prędkościami $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$, między którymi jest kąt α (rys. 1). Jak jest skierowany i jaką ma wartość wektor prędkości skrzyni w chwili, gdy liny są równoległe do wektorów $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$?



Rys. 1

715. Do jakiego napięcia naładuje się kondensator o pojemności C po zamknięciu klucza K w obwodzie przedstawionym na rysunku 2? Jaka będzie maksymalna wartość natężenia prądu podczas ładowania? Siła elektromotoryczna baterii wynosi ε, opór wewnętrzny baterii i opory przewodów łączących są zaniedbywalne. Dioda jest idealna – w kierunku przewodzenia ma opór zerowy, a w kierunku zaporowym jej opór jest nieskończenie wielki. Indukcyjność cewki L jest na tyle duża, że proces ładowania jest powolny.



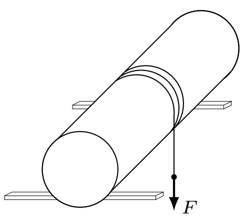
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/2020

Przypominamy treść zadań:

706. Gdy krótkowidz i dalekowidz używają swoich okularów, widzą tak jak człowiek, który ma dobry wzrok. Pewnego razu przez pomyłkę panowie zamienili swoje okulary. Po włożeniu okularów krótkowidza dalekowidz stwierdził, że widzi ostro tylko bardzo daleko położone przedmioty. Jaka jest najmniejsza odległość, z której krótkowidz w okularach dalekowidza widzi ostro drobny druk?

707. Na dwóch równoległych poziomych deskach leży pełny walec o promieniu R i masie m, na który nawinięty jest sznurek (rys. 3). Na zwisający koniec sznurka działa pionowo siła F. Jaka jest najmniejsza wartość współczynnika tarcia między walcem a deskami, przy której będzie on się toczył bez poślizgu. Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek ciężkości i siła F leżą w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami.



Rys. 3

706. Ogniskowa nienapiętej soczewki ocznej dalekowidza jest dłuższa niż odległość y soczewki od siatkówki. Oglądając odległe przedmioty, musi on napiąć mięśnie soczewki, aby jej ogniskowa uległa skróceniu. Maksymalna zdolność skupiająca soczewki ocznej dalekowidza wynosi

(1) $$D_1 = 1/d_1 + 1/y,$$

gdzie d_1 jest jego odległością najlepszego widzenia.

Oznaczmy przez f_2 ogniskową okularów krótkowidza. Ponieważ dalekowidz w tych okularach widzi ostro tylko odległe przedmioty, zachodzi związek

(2) $$1/f_2 + D_1 = 1/y.$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy stąd

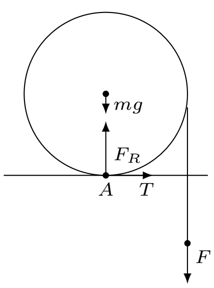
(3) $$-1/f_2 = 1/d_1.$$

Dalekowidz w swoich własnych okularach o ogniskowej f_1 ma odległość dobrego widzenia $d = 25$ cm jak człowiek bez wady wzroku, co wyraża równanie

(4) $$1/f_1 + D_1 = 1/y + 1/d.$$

Podstawiając za D_1 (1), dostajemy

(5) $$1/f_1 = 1/d - 1/d_1.$$



Rys. 4

Oznaczmy maksymalną zdolność skupiającą soczewki ocznej krótkowidza przez D_2, a jego odległość najlepszego widzenia bez okularów przez d_2. Rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy

(6) $$1/f_2 = 1/d - 1/d_2.$$

Po włożeniu okularów dalekowidza odległość najlepszego widzenia krótkowidza a spełnia związek

(7) $$1/f_1 + 1/d_2 = 1/a.$$

Rozwiązując układ równań (3), (5)–(7), otrzymujemy szukaną odpowiedź $a = d/2 = 12{,}5$ cm.

707. Na rysunku 4 zaznaczone są siły działające na toczący się walec. Siła tarcia statycznego T działa w prawo, bo gdyby tarcia nie było, walec obracałby się w miejscu przeciwnie do wskazówek zegara. Równanie ruchu postępowego walca ma postać

$$ma = T.$$

Przyspieszenie a środka masy walca możemy znaleźć z równania ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt A:

$$I_A \varepsilon = FR,$$

gdzie $\varepsilon = a/R$ jest przyspieszeniem kątowym walca, a $I_A = 3mR^2/2$ jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt A. Stąd

$$a = 2F/3m.$$

Tarcie statyczne nie może przekroczyć wartości maksymalnej

$$T = 2F/3 \leqslant \mu\,(F + mg)\,.$$

Najmniejsza wartość współczynnika tarcia, przy której możliwy jest ruch bez poślizgu, wynosi

$$\mu = \frac{2F}{3\,(F + mg)}.$$