Podstawiamy ponownie $x \mapsto 1/x$, czyli otrzymujemy $K(1/x) = \frac{x+x^2}{(x-1)^3}$. Przewidujemy zatem, że dla $x = 1000$ otrzymamy bloki trzycyfrowe zawierające kolejne kwadraty. Istotnie

$$K(1/1000) = \frac{1000^2 + 1000}{(1000-1)^3} = \frac{10001000}{997002999} =$$
$$= 0{,}\ 001\ 004\ 009\ 016\ 025\ 036\ 049\ 064\ 081\ 100\ 121\ 144\ 169\ 196\ 225\ 256\ 289\ 324\ 361\ 400\ 441\ 484\ 529\ 576\ 625\ 676\ 729\ 784\ 841\ 900\ldots$$

Ułamek $K(1/1000)$ jest okresowy o okresie 2 994 003.

zgodnie z przewidywaniami.

Na koniec zachęcamy Czytelnika do samodzielnych ćwiczeń.

Zadanie 1. Uzasadnić słuszność wzoru (♠).

Liczby Lucasa: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

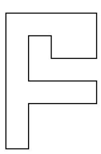
Zadanie 2. Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby Lucasa w blokach pięciocyfrowych.

Zadanie 3. Wyznaczyć ułamek tworzący kolejne liczby trójkątne w blokach czterocyfrowych.

Zadania

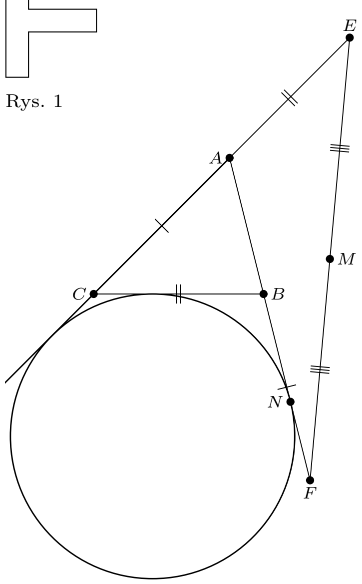
Przygotował Dominik BUREK

M 1663. Jaka jest największa możliwa liczba niezachodzących na siebie figur w kształcie $\mathcal{F}$ (rys. 1), które można wyciąć z kwadratu 300×300? Figury można obracać i odwracać na drugą stronę.
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

M 1664. Na przedłużeniach boków CA i AB trójkąta ABC obrano punkty E i F odpowiednio tak, że $AE = BC$ i $BF = AC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC, styczny do boku BC, jest styczny do BF w punkcie N. Punkt M jest środkiem odcinka EF. Udowodnij, że prosta MN jest równoległa do dwusiecznej kąta przy wierzchołku A.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

M 1665. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d spełniających równość

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} + \frac{1}{c^3+1} + \frac{1}{d^3+1} = 2$$

zachodzi nierówność

$$\frac{1-a}{a^2-a+1} + \frac{1-b}{b^2-b+1} + \frac{1-c}{c^2-c+1} + \frac{1-d}{d^2-d+1} \geqslant 0.$$

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1017. Piramida Cheopsa po wybudowaniu była ostrosłupem o podstawie kwadratowej o boku $a = 230\,\mathrm{m}$ i wysokości $H = 147\,\mathrm{m}$. Zbudowano ją z bloków wapienia. Oszacuj, ile czasu trwałoby dzisiaj jej wznoszenie, gdyby przy jej budowie bez przerwy pracowały dźwigi o łącznej mocy $P = 500\,\mathrm{kW}$. Gęstość wapienia $\rho \approx 2{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.
Wskazówka: środek masy ostrosłupa znajduje się w 1/4 jego wysokości.
Rozwiązanie na str. 1

F 1018. Samolot o masie $M = 10^4\,\mathrm{kg}$ ląduje z początkową prędkością $v_0 = 200\,\mathrm{km/godz.}$ Z powierzchnią lotniska stykają się dwa koła, każde o średnicy $d = 2\,\mathrm{m}$ i momencie bezwładności $I = 100\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$. Koła mogą obracać się bez oporu, a w momencie lądowania nie obracają się. W chwili zetknięcia się z płytą lotniska koła zaczynają się ślizgać. O ile zmniejszy się prędkość samolotu do czasu, gdy koła zaczną toczyć się bez poślizgu? Pomijamy opór powietrza.
Rozwiązanie na str. 15