Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021

Zadania z matematyki nr 815, 816

Redaguje Marcin E. KUCZMA

815. Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie
$$f(x+y^3)+g(x^3+y)=h(xy) \quad \text{dla} \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

816. Liczba naturalna n ma taki dzielnik dodatni d, że d^2-2 dzieli się przez $n-1$. Wykazać, że n jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 816 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

807. Dane są liczby $A, B > 0$; $AB < 1$. Funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki
$$|f(x)-f(y)| \leqslant A\cdot|x-y|, \qquad |g(x)-g(y)|\leqslant B\cdot|x-y|,$$
przy czym f jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$; ma więc funkcję odwrotną $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f(h(x))=h(f(x))=x)$. Udowodnić, że funkcja $g+h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.

808. Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$.

807. Z podanych warunków (*Lipschitza*) wynika ciągłość funkcji f, g. Funkcja f jest ciągłą bijekcją zbioru $\mathbb{R}$; wiadomo, że funkcja odwrotna $h=f^{-1}$ wtedy też jest ciągła. Przy tym spełnia warunek: $|h(x)-h(y)|\geqslant \frac{1}{A}|x-y|$.

Mamy wykazać, że funkcja $g+h$ jest bijekcją zbioru $\mathbb{R}$. Różnowartościowość: załóżmy, że $g(x)+h(x)=g(y)+h(y)$; wówczas
$$|x-y|\geqslant\frac{1}{B}\,|g(x)-g(y)|=\frac{1}{B}\,|h(y)-h(x)|\geqslant\frac{1}{AB}\,|x-y|,$$
a to (wobec założenia $AB<1$) wymusza równość $x=y$.

Różnowartościowa funkcja ciągła $g+h$ musi być ściśle monotoniczna. Pozostaje uzasadnić, że odwzorowuje ona zbiór $\mathbb{R}$ na *cały* zbiór $\mathbb{R}$. To zaś wynika na przykład z szacowania
$$|g(x)+h(x)|\geqslant|h(x)-h(0)|-|g(x)-g(0)|-|g(0)+h(0)|\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{A}\cdot|x-0|-B\cdot|x-0|-|g(0)+h(0)|=C\cdot|x|+D,$$
ze stałymi $C=\frac{1}{A}-B>0$, $D=-|g(0)+h(0)|$. Pokazuje ono, że $\lim_{|x|\to\infty}|g(x)+h(x)|=\infty$. W połączeniu z ciągłością i ścisłą monotonicznością funkcji $g+h$, uzasadnia to jej bijektywność ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}$).

808. Gdy liczby wymierne $x, y>1$ spełniają podane równanie $x^{y-1}=y$, wówczas zapisując x oraz $y-1$ w postaci ułamków nieskracalnych $y-1=\frac{a}{b}$, $x=\frac{c}{d}$ dostajemy równanie
$$c^ab^b=(a+b)^bd^a.$$
Ponieważ $\mathrm{nwd}(c,d)=1$ oraz $\mathrm{nwd}(b,a+b)=1$, implikuje to układ równań
$$(1)\qquad (a+b)^b=c^a \quad\text{oraz}\quad b^b=d^a.$$
Stąd – ponownie z uwagi na warunek $\mathrm{nwd}(a,b)=1$ (tym razem stosowany do wykładników w równaniach (1)) – wynika, że
$$(2)\qquad a+b=m^a,\ \ c=m^b \quad\text{oraz}\quad b=n^a,\ \ d=n^b$$
dla pewnych liczb naturalnych m, n. Teraz szacowanie $a=m^a-b=m^a-n^a\geqslant \geqslant(n+1)^a-n^a\geqslant 2^a-1$ pokazuje, że $a=1$. Ze związków (2) dostajemy: $b=n$, $m=n+1$, $c=(n+1)^n$, $d=n^n$, więc ostatecznie
$$x=\frac{c}{d}=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n, \qquad y=\frac{a+b}{b}=\frac{n+1}{n}\,.$$
Na odwrót, łatwo sprawdzić, że każda para (x,y) postaci $\big(\big(\frac{n+1}{n}\big)^n, \frac{n+1}{n}\big)$, $n\in\mathbb{N}$, spełnia wyjściowe równanie.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2019/20

Janusz Olszewski	20 – 43,43
Marek Spychała	2 – 42,98
Tomasz Wietecha	12 – 42,77
Jakub Węgrecki	41,76
Marcin Małogrosz	3 – 41,65
Paweł Burdzy	41,58
Michał Koźlik	35,73
Marcin Kasperski	4 – 32,68
Jerzy Cisło	14 – 30,04
Kacper Morawski	28,79
Bartłomiej Pawlik	27,51
Stanisław Bednarek	2 – 26,17
Piotr Sołtan	25,51
Janusz Wojtal	25,24
Szymon Kitowski	23,49
Piotr Kumor	14 – 23,38
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Witold Bednarek	8 – 21,90
Radosław Kujawa	21,78
Jędrzej Biedrzycki	21,60
Mikołaj Pater	1 – 21,49
Marian Łupieżowiec	1 – 21,26
Błażej Żmija	1 – 18,04
Paweł Najman	8 – 17,51
Grzegorz Wiączkowski	17,41
Michał Adamaszek	5 – 17,33
Łukasz Merta	1 – 17,31
Marek Prauza	4 – 16,62
Norbert Porwol	15,90
Semen Słobodianiuk	15,83
Adam Woryna	3 – 15,10

Legenda (przykładowo):
stan konta 8 – 21,90 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 21,90 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2018, 2019 lub 2020.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (14), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (20), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (5), P. Kubit (7), J. Cisło (14), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz, K. Kamiński, J. Fiett (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, Ł. Merta, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, M. Pater, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, B. Żmija, P. Żmijewski.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2019/20

Pora na coroczne omówienie sezonu ligowego. Aż dziw, żadne z zadań nie okazało się rzetelnie trudne: współczynnik trudności (WT) ani razu nie przekroczył trójki; liczba prawidłowych rozwiązań (LPR) tylko w dwóch zadaniach poniżej 10. Również bardzo niewiele odnotowujemy rozwiązań uderzających oryginalnością. Czyli nic ciekawego? Zupełnie błędne wrażenie: mnóstwo ciekawych komentarzy do zadań. Tu wiodącym autorytetem jest **Piotr Kumor**; do każdego zadania teorioliczbowego był w stanie stworzyć sążnisty elaborat, omawiający samo zagadnienie (*„jest dobrze znane"*) wraz z obszerną otoczką – teorią wokół zadania, historią, bibliografią. Także inni uczestnicy ligi sypali interesującymi uwagami.

W minionych latach staraliśmy się włączać podobne komentarze, w formie ekstraktu redakcyjnego, do drukowanego tekstu omówienia. Tym razem ich rozmiar nie dał temu szans. Za to szansą okazał się równoległy numer *Delty* w wersji elektronicznej; tam pojemność (nieograniczona) pozwoliła zamieścić wybrane prace, wraz z nadbudową erudycyjną, w całości lub z nieznacznymi skrótami. Czytelników zapraszamy do ich lektury; można się naprawdę wiele ciekawego dowiedzieć.

* * *

Zadanie **786.** [Istnieje nieskończenie wiele czwórek $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$: $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$, $bd-1$, $cd-1$ to kwadraty] (WT=1,22; LPR=19). Niefortunnie sformułowane było to zadanie; lepiej byłoby pytać o nieskończony ciąg *rozłącznych* takich czwórek – bo w obecnej wersji wystarczyło ustalić jedną lub dwie zmienne (np. $b=1$, $c=2$) i tylko żonglować pozostałymi trzema lub dwiema. Wszelako i ta ambitniejsza wersja została z powodzeniem zaatakowana przez wielu rozwiązujących. Liczne interesujące uwagi przedstawił **P. Kumor** (→ wydanie elektroniczne); na przykład, że nie wiadomo, czy istnieje choć jedna taka czwórka, by również liczba $ad-1$ była kwadratem…

Zadanie **787.** [$M\subset\mathbb{Z}$; $0<|M|=n<\infty \Rightarrow \exists(x_1,\ldots,x_n)$(permutacja zbioru M) $\forall\, i,j,k\colon\ (i<j<k\ \Rightarrow\ x_i+x_k\neq 2x_j)$] ($WT$=2,26; LPR=11). Nietrudne; rozwiązania na ogół podobne do firmowego. Także i w tym zadaniu **P. Kumor** wskazał ciekawe uogólnienia; na przykład, że w treści zadania nie jest istotne, by zbiór M składał się z liczb całkowitych – może to być dowolny skończony podzbiór dowolnej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$; i mnóstwo innych komentarzy (więc znów: → wydanie elektroniczne).

Zadanie **788.** [$\forall a,b,c\,(\text{boki}\triangle)$: $\sum_{\text{cykl}}(a^2b+ab^2)-3abc\geqslant t\big(\sum a\big)^3$; $\max t=?$] (WT=1,82; LPR=13). Wynik: $\max t=1/9$; równość przy $a=b=c$; należało więc pokazać, że $F(a,b,c)\geqslant \frac19\big(\sum a\big)^3$, gdzie $F(a,b,c)$ oznacza wyrażenie po lewej stronie. Prawie wszyscy (a także rozwiązanie firmowe) używali nierówności Schura lub/i innej mądrej wiedzy. Toteż zadziwia prostotą metoda, jaką zastosował **Karol Matuszewski**: niech $s=a+b+c$ oraz (b.s.o.) $c\geqslant s/6$; skoro $ab\leqslant\frac14(a+b)^2=\frac14(s-c)^2$, zatem (po prostym przekształceniu)

$$(1)\qquad F(a,b,c)=sc(s-c)+ab(s-6c)\geqslant sc(s-c)+\tfrac14(s-c)^2(s-6c).$$

Wobec jednorodności można przyjąć, że $s=1$ (więc $\frac16\leqslant c<\frac12$); pozostaje pokazać, że

$$(2)\qquad w(c)\colon=c(1-c)+\tfrac14(1-c)^2(1-6c)\geqslant\tfrac19\,.$$

Tę własność (wielomianu jednej zmiennej!) można uzasadniać różnymi sposobami. Autor omawianej pracy użył rachunku pochodnych – nie ustrzegając się w tym usterki; ona jednak wydaje się drobna wobec urody rozumowania (oszacowanie (1) i sprowadzenie problemu do zależności (2)); zaś nierówność (2) da się uzasadnić króciutko: $w(c)-\frac19=\frac{1}{36}(5-6c)(1-3c)^2\geqslant 0$.

Zadanie **790.** [$\triangle ABC$ ostrokątny; $D,E\notin\triangle ABC$; $|AD|=|BD|$, $|AE|=|CE|$; $AD\perp BD$, $AE\perp CE$; $CD\cap BE=\{P\}$; M,N – środki $BC,DE\Rightarrow MN\perp DE\perp AP$] ($WT$=2,68; LPR=12). Dziwi taki stosunkowo wysoki współczynnik trudności przy tak – zdawałoby się – prostym zadaniu. Kilka osób zwróciło uwagę, że druga (nieco trudniejsza) część tezy ($DE\perp AP$) to bezpośrednia konsekwencja faktu (dość znanego), że gdy na bokach AB, AC, BC zostaną zbudowane kwadraty o środkach (odpowiednio) D, E, F, wówczas proste AF, BE, CD zawierają wysokości trójkąta DEF; zatem punkt P to jego ortocentrum. Podawano dowody tego twierdzenia (zresztą niezbyt trudne) lub (**J. Fiett**) odsyłacz do książki: Coxeter, Greitzer, *Geometry Revisited*, 1967 (Th. 4.81).

Było też, jak zwykle w geometrii, kilka rozwiązań analitycznych (w prostokątnym układzie współrzędnych), bardzo różniących się urodą i prostotą; rozmiary: od pół strony banalnych równości (**J. Cisło**) do czterech bitych stron zaiste żmudnych rachunków.

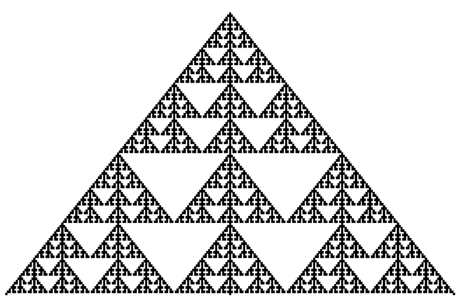
Zadanie **796.** [$m>n>1$; $m=2l$; $l,n\in\mathbb{N}\Rightarrow \big((\exists\, x,y\in\mathbb{N}\colon\ x^m+y^m=(x+y)^n)\Leftrightarrow (m-n)|(n-1)\big)$] ($WT$=2,34; LPR=12). Założenie parzystości m (oraz uporządkowanie: $m>n$) miało jedynie na celu zapewnienie poziomu elementarności, do jakiego stara się dostosowywać nasza liga. Wszelako dla naszych etatowych erudytów obecność takiego sztucznego założenia stała się oczywistym wyzwaniem. **Piotr Kumor** znalazł – używając twierdzenia Zsigmondy'ego (por. Δ^2_{20}) – rozwiązanie równania $x^m + y^m = (x+y)^n$ w czwórkach liczb naturalnych (m,n,x,y). **Janusz Olszewski** – tak samo, przy czym pokazał również inną metodę, nie odwołującą się do tw. Zsigmondy'ego; poszedł ponadto jeszcze krok dalej i podał pełne rozwiązanie równania w liczbach $m,n \in \mathbb{Z}$ oraz $x,y \in \mathbb{N}$. Oto wynik: dobre są czwórki

$$(1,1,x,y)\ \ (x,y\in\mathbb{N}\ \text{dowolne});\qquad (3,2,2,1);\qquad (3,2,1,2);$$
$$(m,n,2^k,2^k)\ \ (k,m,n\in\mathbb{Z},\ \ k\geqslant 0,\ \ n-1=k(m-n));$$

i tylko takie. Po szczegóły – ponownie odsyłamy do wersji elektronicznej.

Zadanie **797.** [$\max\lambda = ?$ gdy $\forall\triangle ABC\colon\ \mathrm{dist}(C,AB)=h$; M,N – środki AC,BC; $P\in AB$; okrąg (NBP) styczny do $BM \Rightarrow |AP|\geqslant\lambda h$] ($WT$=2,57; LPR=10). Wynik: $\max\lambda=\sqrt{2}$ uzyskali wszyscy rozwiązujący. Ale tylko trzej: **M. Adamaszek**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski** zrobili to zadanie „geometrycznie" (jak firmówka); pozostali – mocno rachunkowo (na ogół żmudnie i nie zawsze bez zastrzeżeń).

Zadanie **798.** [Diagram $\begin{smallmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{smallmatrix}$; (wiersz n) = ($2n$+1 liczb >0); każdy element to suma trzech liczb nad nim ($\searrow,\downarrow,\swarrow$) $\Rightarrow$ (a) w każdym wierszu o numerze $n\geqslant 2$ jest liczba parzysta; (b) w których wierszach są dokładnie trzy liczby nieparzyste?] (WT=2,11; LPR=11). Bierzemy wszystkie wyrazy (mod 2); powstaje trójkątny diagram zero-jedynkowy, jak na ilustracji poniżej (skopiowany z pracy, którą przysłał **Janusz Fiett**; bardzo podobne przysłali **J. Olszewski** i **A. Kurach**). Diagram przypomina „trójkąt Pascala (mod 2)" i okazuje się jeśli nie równie sławny, to niewiele mniej. Ponownie **Piotr Kumor** udzielił wyczerpującej lekcji; jego praca (→ elektroniczne wydanie numeru) zawiera mnóstwo ciekawych informacji.



Kilku uczestników wskazało bardzo proste uzasadnienie tezy (a): wystarczy kontrolować (mod 2) cztery początkowe wyrazy n-tego wiersza; dla $n=2,3,4,5,6$ mamy (kolejno) bloki: 1010, 1101, 1000, 1110, 1010, i wpadamy w cykl; bloki powtarzają się z okresem 4; stale jest obecne jakieś zero.

Teza (b): dokładnie trzy jedynki tylko dla $n=2^s$ – jest znacznie ciekawsza. Użyty w rozwiązaniu firmowym język algebry (wielomiany $(1+x+x^2)^n$) nie jest jedynym możliwym, ale jest wygodny. Język „czystej kombinatoryki" też pozwala zapisać rozumowanie, jednak kosztem sporych uciążliwości w opisie (**Janusz Olszewski** przysłał rozwiązania w obu tych stylach). Analizując wspomniane wielomiany bardziej wnikliwie, **Mikołaj Pater** wykazał (→ e-wydanie), że liczba jedynek w n-tym wierszu (oznaczona jako $b(n)$) spełnia zależności rekurencyjne (dla $n=0,1,2,\ldots$):

$$b(2n)=b(n);\quad b(4n+1)=3b(n);\quad b(4n+3)=b(2n+1)+2b(n);$$

to znaczne wzmocnienie tezy (b).

Zadanie **800.** [Dane $a,b>0$; $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{1-a/x}+\mathrm{e}^{1-b/x})$ dla $x>0 \Rightarrow (\exists!\,L>0\colon\ f(L)=1)$; usytuowanie L względem średnich A,G,H liczb a,b?] (WT=2,84; LPR=5 (7?)). Odpowiedź: $A\geqslant G\geqslant L\geqslant H$. Dobre rozwiązania przysłali: **Michał Adamaszek** (autor zadania), **W. Bednarek**, **J. Olszewski**, **B. Żmija** oraz (z niewielką, łatwo usuwalną usterką) **P. Sołtan**; były ponadto dwie prace z usterkami nieco bardziej znaczącymi. Jeszcze kilka osób przysłało uzasadnienie samej tylko nierówności $G\geqslant L$, wyraźnie łatwiejszej niż $L\geqslant H$.

Funkcja f jest ściśle rosnąca, więc ta ciekawsza teza $H\leqslant L$ sprowadza się do wykazania, że $f(H)\leqslant 1$. Urzekająco prosty dowód tej ostatniej nierówności przedstawił **Witold Bednarek** (przypomnijmy – uczestnik Ligi od momentu jej narodzin): ponieważ $\mathrm{e}^t\geqslant 1+t$, wobec czego $\mathrm{e}^{-t}\leqslant\frac{1}{1+t}$ dla $t>-1$, zatem biorąc kolejno $t_1=\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}$ oraz $t_2=\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}$, dostajemy (dla $H=\frac{2ab}{a+b}$)

$$f(H)=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{1-\frac{a}{H}}+\mathrm{e}^{1-\frac{b}{H}}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-t_1}+\mathrm{e}^{-t_2}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+t_1}+\frac{1}{1+t_2}\Big)=1.$$

Pięknie!

Zadanie **804.** [$p>2$ liczba pierwsza; $A_r=\{(x_1,\ldots,x_p)$ – permutacja zbioru $\{0,\ldots,p-1\}$: $\sum kx_k\equiv r\pmod p\}\Rightarrow |A_r|=|A_s|$ dla $0<r<s<p$] (WT=2,58; LPR=9). Dobre prace: **M. Adamaszek**, **W. Drozd**, **A. Kurach**, **K. Matuszewski**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski**, **M. Pater**, **R. Słowik**, **B. Żmija**. Najciekawsze w tym zadaniu było to, czego w zadaniu nie było. Zbiory $A_1,\ldots,A_{p-1}$ mają jednakową liczbę elementów; zgoda; a *ile* wynosi ta liczba? Oznaczmy tę wspólną wartość (dla ustalonej liczby pierwszej p) przez b_p; jak się ona porównuje z licznością zbioru A_0, którą (dla tego samego p) oznaczymy a_p? Jasne, że $a_p+(p-1)b_p=p!$, więc poszukiwanie wartości b_p można zastąpić obliczaniem a_p; nie jest jednak znany żaden prosty wzór, wyrażający a_p (lub b_p) jako funkcję zmiennej p (kilka wartości: $a_3=0$, $a_5=20$, $a_7=630$, $a_{11}=3634950$; $a_p<b_p$ dla $p\leqslant 7$, ale nie dla $p=11,13,17,19$).

Michał Adamaszek zwrócił uwagę, że dla *każdej* liczby $n\in\mathbb{N}$ (niekoniecznie pierwszej) można określić a_n jako liczność zbioru permutacji $(x_1,\ldots,x_n)$ reszt (mod n), spełniających warunek $\sum kx_k\equiv 0\pmod n$, i że ciąg (a_n) to A004204 w OEIS (wartości numeryczne dla $n\leqslant 20$).

Dla liczby pierwszej p określa się *macierz Schura* $M_p=[\alpha^{kl}]_{1\leqslant k,l\leqslant p}$, gdzie α jest dowolnym nierzeczywistym p-tym pierwiastkiem z jedności. Liczba $\sum_\pi\prod_k\alpha^{k\pi(k)}$ (sumowanie po wszystkich permutacjach π) – tzw. *permanent* macierzy M_p (ozn. $\mathrm{perm}\,M_p$) – jest równa a_p-b_p (nietrudne ćwiczenie). Numeryczne wyznaczanie wartości a_p (lub b_p) ma więc złożoność obliczeniową jak wyznaczanie $\mathrm{perm}\,M_p$ – czyli wysoką; wiele ciekawych informacji można znaleźć w sieci (Google: permanent of a matrix; także ciąg A003112 w OEIS).

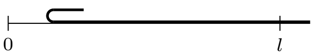
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2021

Zadania z fizyki nr 712, 713

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

712. Długi, cienki i wiotki dywan o długości l i masie m leży na podłodze. Jeden z końców dywanu jest odgięty i ciągnięty do tyłu ze stałą prędkością v po części dywanu, która nadal leży na podłodze (rys. 1). Jaka siła działa na dywan w kierunku poziomym? Tarcia między częściami dywanu nie uwzględniamy, dolna część dywanu pozostaje nieruchoma.



Rys. 1

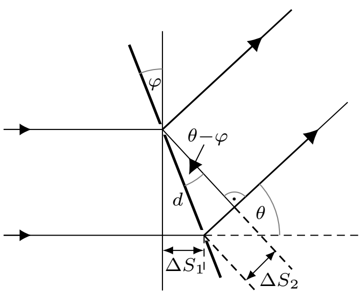
713. Ze szczytu góry na szerokości geograficznej północnej $\varphi_0 = 30^o$ wystrzelono pocisk wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna Ziemi i wprowadzono go na orbitę kołową wokół Ziemi. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Dane są: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi T, promień Ziemi R, przyspieszenie grawitacyjne g. Zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbujemy opory powietrza.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2020

Przypominamy treść zadań:

704. Wąska monochromatyczna wiązka światła laserowego pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione są pionowo. Jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt $\varphi < \pi/2$ wokół osi równoległej do szczelin siatki?

705. W jednorodnej kuli o promieniu $2R$ i gęstości ρ znajduje się współśrodkowa kulista wnęka o promieniu R. Znaleźć energię potencjalną punktu materialnego o masie m znajdującego się w wydrążeniu, w odległości $R/2$ od środka wydrążonej kuli. Oddziaływania zewnętrzne zaniedbujemy.



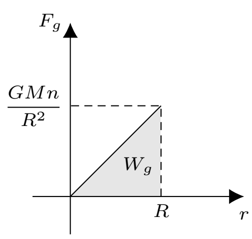
Rys. 2

704. Gdy światło o długości fali λ pada prostopadle na siatkę o stałej d, położenie maksimów interferencyjnych wyznacza kąt θ dany wzorem $d\sin\theta = k\lambda$, gdzie $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Po obrocie siatki o kąt φ równanie to musimy zmodyfikować, przy czym wystarczy rozważyć interferencję na dwóch szczelinach odległych o d (rys. 2). Różnica dróg optycznych promieni ugiętych pod kątem θ wynosi teraz $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = d\sin\varphi + d\sin(\theta-\varphi)$, a warunek na maksima interferencyjne $d(\sin\varphi + \sin(\theta-\varphi)) = k\lambda$. Widać, że po obróceniu siatki położenie zerowego maksimum nie ulegnie zmianie, ale obraz interferencyjny przestanie być symetryczny. Przyjmijmy, że kąt φ jest dodatni, gdy obracamy siatkę przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (podobnie dodatni kąt θ odpowiada promieniowi ugiętemu w tym samym kierunku). Wtedy maksymalny kąt ugięcia $\theta_{\max} = \pi/2 + \varphi$, odpowiadająca mu różnica dróg optycznych $\Delta s = d(1+\sin\varphi)$. Maksymalna liczba maksimów na ekranie dla dodatnich θ jest równa

$$k_+ = \lfloor d(1+\sin\varphi)/\lambda \rfloor.$$

Analogicznie $\theta_{\min} = -\pi/2 + \varphi$, maksymalna liczba maksimów dla ujemnych kątów ugięcia

$$k_- = \lfloor d(1-\sin\varphi)/\lambda \rfloor < k_+.$$



Rys. 3

705. Zgodnie z prawem Gaussa na ciało umieszczone wewnątrz wydrążenia siła grawitacji nie działa. Przesunięcie ciała między dowolnymi punktami wewnątrz wydrążenia nie wymaga więc żadnej pracy i energia potencjalna wewnątrz wydrążenia jest wszędzie taka sama. Najwygodniej jest obliczyć ją dla środka wydrążenia. W tym celu skorzystamy z zasady superpozycji i od energii w środku pełnej kuli o promieniu $2R$ oraz gęstości ρ odejmiemy energię w środku kuli o rozmiarach wydrążenia i takiej samej gęstości.

Energię potencjalną $E_p(O)$ w środku O jednorodnej kuli o gęstości ρ i promieniu R znajdziemy ze wzoru $E_p(A) - E_p(O) = W_q(A \to O)$, gdzie A jest jest punktem na powierzchni kuli, a $W_q(A \to O)$ pracą siły grawitacji przy przenoszeniu ciała o masie m do środka kuli o masie $M = 4\pi R^3\rho/3$. Ponieważ siła grawitacji wewnątrz jednorodnej kuli zmienia się liniowo (rys. 3),

$$W_q(A \to O) = GMm/(2R) = 2\pi Gm\rho R^2/3.$$

Uwzględniając, że $E_p(A) = -GMm/R$, otrzymujemy

$$E_p(O) = -2\pi R^2\rho Gm.$$

Szukana energia potencjalna w wydrążonej kuli wynosi

$$E_{px}(O) = -2\pi\rho Gm((2R)^2 - R^2) = -6\pi R^2\rho Gm.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2019/20
(po 701 zadaniach)

Michał Koźlik (Gliwice)	4 – 42,82
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Krzysztof Magiera (Łosiów)	3 – 39,55
Jan Zambrzycki (Białystok)	2 – 31,61
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Jacek Konieczny (Poznań)	31,13
Tomasz Wietecha (Tarnów)	14 – 29,47
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Sławomir Buć (Mystków)	25,94
Mateusz Kapusta (Wrocław)	25,37
Konrad Kapcia (Częstochowa)	1 – 19,60
Piotr Adamczyk (Warszawa)	17,94
Paweł Perkowski (Ożarów)	3 – 17,14

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2017–2019 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 17 punktów. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2019/20

Współczynnik trudności zadań w ubiegłym roku szkolnym rozłożył się dosyć równomiernie, dla pięciu zadań był niższy niż 2, dla sześciu przekroczył wartość 3.

Wśród tych trudniejszych warte dokładniejszego omówienia wydaje się zadanie **696** ($WT = 3{,}59$). Lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich o takich samych energiach wylatywała z pewnego punktu naładowanego kondensatora cylindrycznego. Kąt rozwarcia wiązki wynosił α. Zewnętrzna okładka kondensatora naładowana była dodatnio. Prędkości jonów leżały w płaszczyźnie prostopadłej do osi kondensatora. Jony ze środka wiązki poruszały się po okręgu o promieniu r_0 współśrodkowym z okładkami kondensatora. Należało wykazać, że wiązka jonów zogniskuje się ponownie w pewnym punkcie, znaleźć kąt, jaki zatoczy do tego momentu, oraz maksymalną szerokość wiązki. W rozwiązaniu „firmowym” zostało wykazane, że jony poruszają się w kierunku radialnym ruchem harmonicznym z jednakowym okresem, maksymalna szerokość wiązki była równa podwojonej amplitudzie drgań. Wśród nadesłanych rozwiązań nie było całkowicie poprawnych, a autorzy najbardziej zaawansowanych korzystali z zasady zachowania energii. Przedstawię więc szkic rozwiązania energetycznego.

Zasada zachowania energii ma postać

$$mv_0^2/2 = mv_{\min}^2/2 + bqln\left(1 + x_{\max}/r_0\right),$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową najbardziej odchylonego jonu, tworzącą kąt $\alpha/2$ ze styczną do okręgu o promieniu r_0, a $v_{\min}$ to jego prędkość w punkcie najbardziej oddalonym od środka okręgu. Siła działająca na jon o ładunku q jest równa $F = bq/r$, $bq = mr_0^2\omega_0^2$, ω_0 jest prędkością kątową jonu poruszającego się po okręgu o promieniu r_0.

Siła elektryczna jest centralna, więc spełniona jest zasada zachowania momentu pędu:

$$v_{\min}\left(r_0 + x_{\max}\right) = \omega_0 r_0^2 \cos(\alpha/2).$$

Podstawiając otrzymane stąd $v_{\min}$ do zasady zachowania energii, otrzymujemy

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) = \frac{r_0^2\cos^2(\alpha/2)}{\left(r_0 + x_{\max}\right)^2} + 2ln\left(1 + x_{\max}/r_0\right).$$

Dla $x_{\max} \ll r_0$ możemy ograniczyć się do pierwszych wyrazów rozwinięcia logarytmu w szereg Taylora: $ln\left(1 + x_{\max}/r_0\right) = x_{\max}/r_0 - x_{\max}^2/2r_0^2$. Stąd

$$\sin^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)\,\frac{2r_0x_{\max} + x_{\max}^2}{\left(r_0 + x_{\max}\right)^2} = \frac{\left(2r_0x_{\max} - x_{\max}^2\right)}{r_0^2}.$$

Aby otrzymać wyrażenie z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu, przybliżamy $\sin^2(\alpha/2) = \alpha^2/4$, $\cos^2(\alpha/2) = 1$ i otrzymujemy

$$\alpha^2/4 = 2x_{\max}^2/r_0^2.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $m\omega_0^2$ widzimy, że jest to równanie na energię oscylatora harmonicznego w kierunku radialnym:

$$\frac{mv_0^2\sin^2(\alpha/2)}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2},$$

gdzie $k = 2qb/r_0^2$. Maksymalna szerokość wiązki jonów jest równa $d = 2x_{\max} = r_0\alpha/\sqrt{2}$.

Najwyższej możliwej oceny nie uzyskało też żadne z rozwiązań zadania **683** ($WT = 3{,}5$). Jego celem było pokazanie, że względne zaburzenie wyniku pomiaru napięcia na elemencie to stosunek oporu woltomierza do oporu wewnętrznego źródła nawet wtedy, gdy opór badanego elementu jest porównywalny, a nawet większy od oporu woltomierza. Nadesłane rozwiązania nie zawierały analizy zaburzenia względnego, a jedynie obliczenia bezwzględnego zaburzenia pomiaru.

Najwyższy współczynnik trudności miało zadanie **688** ($WT = 3{,}77$). Klocek leżał na nieruchomej, szorstkiej taśmie transportera i przymocowany był do ściany za pomocą sprężyny. Po uruchomieniu taśmy ustalały się po pewnym czasie drgania harmoniczne. Należało znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Jedyne w pełni poprawne rozwiązanie z uwzględnieniem możliwych przypadków przysłał **Tomasz Wietecha**. Pan Tomasz był też autorem jedynego całkowicie poprawnego rozwiązania zadania **686** ($WT = 3{,}23$) na temat niecentralnego zderzenia nieważkiego pręta z kulkami na końcach z nieruchomym kołkiem.

W zadaniu **698** ($WT = 3{,}19$) z elektrostatyki należało znaleźć siłę oddziaływania między dwiema leżącymi naprzeciw siebie, równomiernie naładowanymi półsferami o wspólnym środku i wspólnej płaszczyźnie największego przekroju, ale różnych promieniach. Bezbłędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk.** Wyróżnił się też **Konrad Kapcia**, który przedstawił prawidłową metodę postępowania, korzystając z zasady superpozycji. Rozwiązanie zawierało drobny błąd wynikający z nieuwagi, którego skutkiem był dwukrotnie za mały wynik. Inne rozwiązania zawierały próby całkowania wkładów od elementów sfer, niestety zakończone niepowodzeniem.

Jedyne ocenione maksymalnie rozwiązanie zadania **694** ($WT = 3{,}19$) dotyczącego ruchu statku napędzanego „miotaczem wody” przesłał **Paweł Perkowski**.

Dwanaście z tegorocznych rozwiązań **Tomasza Wietechy** uzyskało maksymalną ocenę, trzy z nich były jedynymi poprawnymi z nadesłanych. Drugie miejsce w tej konkurencji zajął **Paweł Perkowski**, który przedstawił dziesięć rozwiązań bez usterek. **Jan Zambrzycki** zdobył siedem ocen maksymalnych, a **Piotr Adamczyk** sześć.

Paweł Perkowski po raz trzeci przekroczył w tym roku barierę 44 punktów.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.