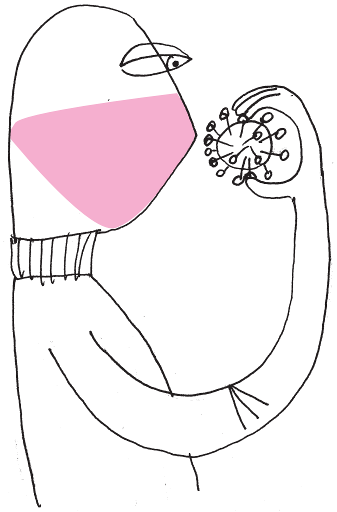


Dlatego potraktowaliśmy model jako punkt wyjścia i uzupełnialiśmy go o sumę dwóch poprawek, wyznaczanych na podstawie dnia tygodnia i liczby testów. Przykładowo, jeśli testów było mało, to poprawka wynosiła -10%, jeśli dużo, to $+10\%$, a w przeciwnym wypadku $+5\%$. Analogicznie reagowaliśmy w drugim przypadku.

Choć obiecaliśmy sobie, że nie będziemy modyfikować modelu ani jego wyników w trakcie hackathonu, to ze względu na niespodziewane pojawienie się nowego ogniska choroby na Śląsku wzbogaciliśmy zestaw poprawek o dodatkowy parametr z tym związany, co poprawiło jakość prognoz.

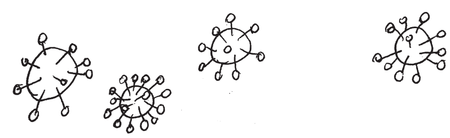
Komentarz kibica

W imieniu Komisji Konkursowej hackathonu, której miałem zaszczyt przewodniczyć, gratuluję zwycięskim zespołom odwagi zmierzenia się z obu wyzwaniami: prognozowaniem tego, co nieprzewidywalne i... pisaniem do *Delty*. Bardzo byłem ciekaw ich rozwiązań i, zapewne jak wielu Czytelników rubryki, podświadomie oczekiwałem, że najlepsze przewidywania będą efektem użycia spektakularnego modelu matematycznego, być może wymagającego nietrywialnej implementacji. Tymczasem okazało się, że najlepsza prognoza była najzwyczajniej w świecie wynikiem działania trzech, równolegle działających, wszechstronnych sieci neuronowych, trenowanych przez ostatnie 20+ lat: to znaczy mózgów zwycięskiej trójki. Pracujących w szczególnym trybie, który nazywamy na różne sposoby: *przeczuciem*, *intuicją*, *zdrowym rozsądkiem*.

Czy naprawdę powinniśmy się temu dziwić? Przewidywane zjawisko było bardzo skomplikowane, m.in. przez wpływ najróżniejszych zewnętrznych szumów: nieznanej i zmiennej liczby testów, sprawozdawczości, nowych ognisk choroby itp. Nie było czasu na długotrwałe analizy i studia epidemiologiczne; z oczywistych powodów nie można było też zapytać specjalistów... W takiej sytuacji chyba każdy miałby silne przeczucie, że postawienie na intuicję jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem.

Aby jednak nie nadawać intuicji znaczenia większego, niż zasługuje, warto zauważyć, że całkowicie odmienna strategia – bezrefleksyjna i nad wyraz leniwa (na którą wszakże nikt się nie zdecydował): *jutro będzie tak samo jak dziś*, dawałaby... drugie miejsce w naszym konkursie.

Piotr KRZYŻANOWSKI



Logika implikacji

*Aleksy SCHUBERT**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Na początek zajmijmy się czymś zupełnie bez sensu†. Na przykład zdaniem:

(A) *Jeśli na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek, to na Merkurym znajdują się ślady człowieka.*

To zdanie jednak bylibyśmy gotowi uznać za „bardziej prawdziwe” niż wypowiedź:

(B) *Jeśli na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek, to autor tego artykułu jest Czyngis-chanem.*

Tymczasem na gruncie logiki klasycznej zdania te są równie prawdziwe. W logice tej jeśli pierwszy człon implikacji (np. *na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*) jest fałszywy albo jeśli drugi człon implikacji (np. *autor tego artykułu jest Czyngis-chanem*) jest prawdziwy, to całe zdanie jest prawdziwe.

Wielu uczniów i studentów burzy się, gdy poda im się taką interpretację wynikania. Jednak w systemie nastawionym wyłącznie na określanie, czy coś jest prawdą, czy fałszem, a takim systemem jest logika klasyczna, wyjścia specjalnie nie mamy. Gdy uprzemy się, że implikacja jest spójnikiem, jak *i* czy *lub,* oraz że

† Dlaczego w ogóle zajmować się czymś bez sensu? Na przykład dlatego, że czasem ktoś poda nieprawidłowe rozwiązanie zadania, ale stwierdzenie błędu wymaga sporego wysiłku.

człony zdania mogą być tylko prawdziwe lub fałszywe, to pozostaje nam jedynie przyjąć jak w logice klasycznej: prawda implikuje tylko prawdę (bo inaczej być nie może), ale fałsz implikuje cokolwiek (bo gdy doszliśmy do fałszu, to jest nam naprawdę wszystko jedno). Taka „teoria prawdy” jest bardzo eleganckim systemem matematycznym, który spodobał się ogromnej liczbie ludzi.

Powyższe podejście ignoruje na przykład fakt, że może aktualnie nie być wiadomo, czy dany człon implikacji jest prawdziwy. Jak zatem mogą sobie poradzić ci niezadowoleni z tego rozwiązania? Czym różni się powyższe zdanie A od B? Otóż za zdaniem A kryje się wyraźna intuicja na temat tego, jak z faktu, że na Merkurym znajduje się człowiek, wydedukować, że znajdują się tam ślady człowieka.

Wielkim orędownikiem pewnej pierwotnej, apriorycznej intuicji w rozumowaniach matematycznych na gruncie matematyki był słynny L. E. J. Brouwer.

Za zdaniem B nie kryje się żadna taka podpowiedź, natomiast ewidentna fałszywość drugiego członu sugeruje nam po cichu, że całe to zdanie musi być jakoś „nieprawidłowe”.

Kłopotliwe jednak w tym podejściu jest to, że w zasadzie nie wiadomo, czym jest intuicja. Matematycy na początku XX wieku (m.in. A. Heyting, A. Church, S. Kleene) doszli do przekonania, że wystarczająco dobrym przybliżeniem pojęcia intuicji będzie pojęcie funkcji rozumianej jako przepis na przetworzenie założonych argumentów w wynik. Jak jednak mogą wyglądać takie *przepisy*? Oznaczmy określany przez nas przepis jako M. Oto potrzebne cegiełki:

Opisany w tekście formalizm definiowania funkcji nazywany jest *rachunkiem lambda*.

- Musimy mieć do dyspozycji mechanizm wprowadzania do obiegu składnika, który może być używany przy dalszym pisaniu przepisu na obliczenie funkcji. Polegający na takiej operacji przepis M można zapisać w postaci wyrażenia $M = \lambda x.N$, gdzie N jest tą częścią przepisu, w której można używać składnika x, zwykle w tym kontekście zwanego argumentem x. Takie wyrażenie będziemy nazywać *lambda abstrakcją x w N*.
- Drugi potrzebny mechanizm to używanie wprowadzonego do obiegu argumentu. Nasz przepis M, jeśli polega właśnie na takim użyciu, można zapisać jako $M = x$. Takie wyrażenie będziemy nazywać *użyciem zmiennej x*.
- Jest jeszcze trzeci mechanizm – to mechanizm zastosowania, inaczej aplikacji, funkcji do zadanego argumentu. Jeśli nasz przepis M ma na tym polegać, to możemy go zapisać jako $M = M_1M_2$, gdzie M_1 jest wcześniej opisanym przepisem na funkcję, a M_2 argumentem (który też może być funkcją). Takie wyrażenie będziemy nazywać *aplikacją M_1 do M_2*.

Rozwiązanie zadania F 1016.
Najmniej energii zużywamy, gdy maksymalnie wykorzystujemy siłę grawitacji podczas poruszania nogami. Wówczas kolejne kroki polegają na swobodnym, wahadłowym ruchu nóg – na przemian lewej i prawej, a jeden krok wykonujemy w czasie połowy okresu wahadła utworzonego z naszej nogi. Okres wahadła fizycznego wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdzie I jest momentem bezwładności, m masą nogi, a d odległością jej środka ciężkości od osi obrotu – w tym przypadku od stawu biodrowego. Przyjmijmy, że noga jest w przybliżeniu jednorodnym prętem o długości l i masie m. Wówczas $I = ml^2/3$, a $d = l/2$. Otrzymujemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

i oszacowanie prędkości spaceru:

$$v = \frac{s}{\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

Dla podanych wartości $l = 0{,}9$ m i $s = 0{,}7$ m otrzymujemy $v \approx 0{,}91$ m/s$\approx$ $\approx 3{,}3$ km/godz. Podawana zwykle „prędkość piechura” równa około 5 km/godz. dotyczy szybkiego marszu wymagającego sporego wysiłku. Noga nie jest jednorodnym prętem, bo udo jest zwykle grubsze od łydki, co zmniejsza moment bezwładności I i „podnosi” środek ciężkości nogi, czyli zmniejsza d. Przybliżenie „ratuje” masa skupiona w stopie znajdującej się na końcu nogi. Zachęcamy Czytelników Dociekliwych do wykonania własnych pomiarów i sprawdzenia poprawności przyjętego tu modelu.

Można się teraz takimi wyrażeniami pobawić i napisać sobie „przepis” $\lambda x.x$. Ta prosta definicja określa funkcję, która dla zadanego argumentu x daje w wyniku właśnie ten argument. W ten sposób zdefiniowaliśmy funkcję identycznościową f, taką że $f(x) = x$. Inny ciekawy przepis to $\lambda x.\lambda y.xy$. Wbrew pozorom nie jest to mnożenie! Zgodnie z przyjętą przez nas notacją przepis ten oznacza, że funkcję, która jest podana jako pierwszy argument, zastosujemy do drugiego argumentu. Tutaj możemy pójść za ciosem i podać cały ciąg podobnych przepisów:

$$\lambda x.\lambda y.xy, \quad \lambda x.\lambda y.x(xy), \quad \lambda x.\lambda y.x(x(xy)), \ldots$$

gdzie argument x jest powtarzany w kolejnych wyrażeniach coraz większą liczbę razy. I tu mamy niespodziankę, bo tym sposobem zbudowaliśmy w naszym języku odpowiedniki liczb naturalnych. Mając do dyspozycji „przepisoliczby” n i m, możemy je dodać za pomocą następującego przepisu na dodawanie:

$$\lambda n.\lambda m.\lambda x.\lambda y.(nx)((mx)y)$$

(zaznaczmy jeszcze, że n i m to przepisy, a nx i mx to *aplikacje* tych przepisów do argumentu x).

Rozszyfrowanie, że powyższe wyrażenie reprezentuje dodawanie, jest niezłą łamigłówką. Jednak wszystko stanie się dużo jaśniejsze, jeśli spostrzeżemy, że dla wyrażenia $(\lambda x.M)N$, polegającego na użyciu przepisu $\lambda x.M$ do argumentu N, ostateczny wynik jest taki sam jak dla wyrażenia, w którym w przepisie M na każde wystąpienie argumentu x wstawimy faktyczną treść N. Proszę popatrzeć (w każdym wierszu podkreśliliśmy argumenty, które biorą udział w przekształceniu):

$$
\begin{aligned}
&((\lambda n.\lambda m.\lambda x.\lambda y.(nx)((mx)y)) \quad \underline{(\lambda x'.\lambda y'.x'(x'y'))}) \quad \underline{(\lambda x''.\lambda y''.x''(x''(x''y'')))} \to \\
&\to (\lambda x.\lambda y.((\lambda x'.\lambda y'.x'(x'y'))\underline{x}) \quad (((\lambda x''.\lambda y''.x''(x''(x''y'')))\underline{x})\underline{y})) \to \\
&\to \lambda x.\lambda y.(\lambda y'.x(xy'))\ \underline{(x(x(xy)))} \to \\
&\to \lambda x.\lambda y.x(x(x(x(xy)))).
\end{aligned}
$$

Rzeczywiście 2 dodane w ten sposób do 3 daje 5. Tutaj ważna uwaga: żeby nam się oznaczenia w przepisach nie pomyliły, pozmienialiśmy nazwy argumentów tak, żeby nazwy wprowadzane przez lambda abstrakcję w wyrażeniach, na których pracujemy, się nie powtarzały. W istocie nie ma przecież znaczenia, czy wewnątrz przepisu pierwszy argument nazwiemy x czy x'.

Czytelnikowi Ambitnemu zalecamy zastanowić się, jak powinien wyglądać przepis na mnożenie.

Jak takie przepisy można powiązać z implikacjami? Możemy przyjąć, że z opisanymi powyżej wyrażeniami wiążemy pewne zdania. Jak to robimy? Otóż z argumentami takimi jak x wiążemy zdania, w których uzasadnienia nie będziemy wnikali, które niejako w nasz świat rozważań weszły z zewnątrz. W świecie matematyki o tego typu zdaniach mówi się założenia lub aksjomaty. To pierwszy rodzaj powiązania. Załóżmy teraz, że mamy wyrażenie N, z którym związane jest zdanie D, np. *człowiek zostawia ślady na Merkurym*. Gdy jednocześnie w obiegu obecny jest argument x, który związany jest ze zdaniem C, np. zdaniem *na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*, to przepis $\lambda x.N$ związany będzie z implikacją $C \Rightarrow D$. Opisuje on, jak zdobyte przez nas doświadczenia połączone ze zdaniem C związanym z x dają świadectwo zdaniu D. Dla naszego przykładowego zdania A stosowny przepis M, który naszych doświadczeń używa do wywołania przekonania o prawidłowości tego zdania, mógłby w szczegółach wyglądać jak poniżej. Dla skrócenia zapisu przyjmijmy, że

Przedstawiony w artykule system logiczny nazywany jest *minimalną logiką implikacyjną*. Co ciekawe, stwierdzanie, czy zdanie jest tautologią tego systemu, jest obliczeniowo trudniejsze niż dla *klasycznej logiki zdaniowej*.

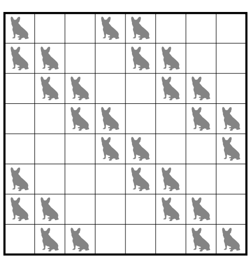
- C to zdanie: *na Merkurym w tej chwili znajduje się człowiek*,
- D to zdanie: *człowiek zostawia ślady na Merkurym*, zaś
- E to zdanie: *na Merkurym znajdują się ślady człowieka*.

Załóżmy, że mamy do dyspozycji doświadczenie g, którego treść da się opisać jako implikacja $C \Rightarrow D$, oraz doświadczenie h, którego treść da się opisać jako implikacja $D \Rightarrow E$. Są to szczególne przypadki doświadczeń ujętych w ogólniejsze prawa: *jeśli człowiek znajduje się w jakimś miejscu, to zostawia tam ślady* oraz *jeśli człowiek zostawia gdzieś ślady, to one się tam znajdują*. Możemy teraz z aplikacją gx związać zdanie D, bo jest ono wynikiem użycia doświadczenia g do argumentu x związanego już wcześniej z założeniem C. Podobnie z $h(gx)$ zwiążemy zdanie E, bo jest ono wynikiem użycia doświadczenia h do wyrażenia gx związanego, jak się przekonaliśmy, z założeniem D. W tej sytuacji szukanym przez nas przepisem M jest po prostu $\lambda x.h(gx)$. Podobnego przepisu nie moglibyśmy skonstruować dla zdania B z początku artykułu, bo nie znamy żadnych doświadczeń, za pomocą których jak z klocków moglibyśmy zbudować podobne powiązanie obecności człowieka na Merkurym z faktem, że autor tego artykułu jest Czyngis-chanem.

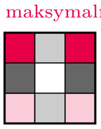
Warto jeszcze może dodać, że w tym systemie teoretycznie możliwe wyrażenie hx odrzucimy, bo doświadczenia h związanego z $D \Rightarrow E$ nie da się zastosować do argumentu x związanego z C. Jak wspomnieliśmy, da się je zastosować tylko do wyrażenia związanego z D. System ten w tym kontekście nazywany jest *rachunkiem lambda z typami prostymi*.

Co ciekawe, tego samego mechanizmu można użyć do zarządzania operowaniem na wartościach. Wtedy pojęcie zdania zastępujemy pojęciem typu. Przyjrzyjmy się naszej reprezentacji liczb naturalnych. Z wyrażeniem $\lambda x.(\lambda y.xy)$ możemy związać, stosując powyższe reguły, typ $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$ – wystarczy, że w podwyrażeniu xy przyjmiemy, iż x jest związane z $\alpha \Rightarrow \alpha$, zaś y z α. Wtedy wyrażenie xy będzie związane z typem α, zaś $(\lambda y.xy)$ z typem $\alpha \Rightarrow \alpha$. Dodanie $\lambda x.$ na początku da natomiast nasze wyrażenie $\lambda x.(\lambda y.xy)$ i będzie ono związane z typem $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$. W tym miejscu pozostaje mi życzyć miłej zabawy przy sprawdzaniu, że zdefiniowana powyżej operacja dodawania ma typ taki, jakiego się spodziewamy.

Rozwiązanie zadania M 1661. Możemy rozmieścić 27 piesków tak, jak wskazano na rysunku, i wówczas żaden nie będzie szczekał. Pokażemy, że jest to największa możliwa liczba.



Zauważmy, że w prostokącie 1×5 pieski mogą być umieszczone albo na dwóch skrajnych polach, albo mogą stać obok siebie. W szczególności można w nim umieścić nie więcej niż dwa pieski. Ponadto łatwo zauważyć, że w dowolnym kwadracie 3×3, którego pola oznaczono jak na rysunku, na polach oznaczonych w ten sam sposób może stać tylko jeden piesek. Wobec tego w takim kwadracie można umieścić maksymalnie 5 piesków.



Dzieląc teraz szachownicę 8×8 w sposób pokazany na rysunku (na 11 prostokątów 1×5 i kwadrat 3×3), widzimy, że „cichych” piesków może być maksymalnie $5 + 11 \cdot 2 = 27$.