Które zgięcie jest naj…?

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

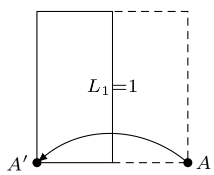
Zadania na „wyznaczanie ekstremum” potrafią być kłopotliwe. Przeglądając *Kurs Analizy* Hardy'ego†, zwróciłem uwagę na wyjątkowo naturalny problem.

† G.H. Hardy, Kurs analizy. Rachunek różniczkowy i całkowy, wyd. II, Warszawa 1930.

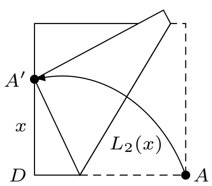
Zadanie 1 (G.H. Hardy, 1908). *Zginamy prostokątną kartkę papieru w ten sposób, że koniec jednego boku leży na boku przeciwległym. Kiedy długość tego zgięcia jest największa?*

Nie, nie podamy pełnego rozwiązania, dla Czytelników muszą być smakołyki! Smak sukcesu zapewni „rozbrojenie” wskazanych podpowiedzi.

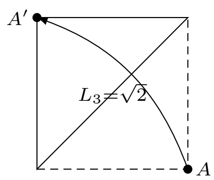
Znane twierdzenie Weierstrassa gwarantuje, że rozwiązanie zadania istnieje. Gdy kartka jest kwadratem jednostkowym, wystarczą rozważania geometryczne – możliwe są trzy przypadki (rys. 1–3).



Rys. 1



Rys. 2



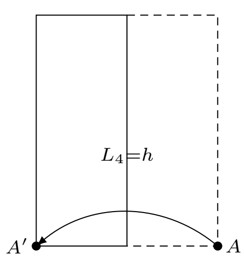
Rys. 3

Gdy punkt A' oddala się od punktu D (rys. 2), to zmienia się położenie zgięcia i rośnie jego długość. Oczywiście zgięcie jest najdłuższe, gdy wierzchołek A przechodzi na wierzchołek przeciwległy A' (rys. 3).

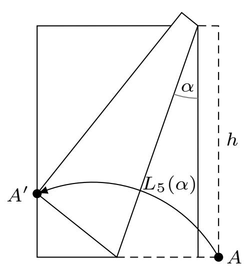
Rozwiązanie analityczne wymaga obliczenia długości zgięcia w zależności od jakiegoś parametru, np. kąta nachylenia linii zgięcia do boku.

Podpowiedź 1. *Wykazać, że dla kwadratu jednostkowego długość zgięcia w przypadku „pośrednim” (rys. 2)* $L_2(x)=\sqrt{1+x^2}$, *gdzie* $|DA'|=x\in(0,1)$.

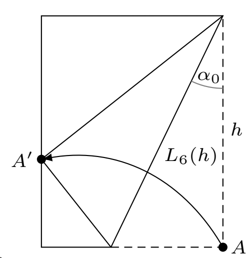
Dla prostokąta o bokach długości $0<a<b$ sprawa się komplikuje. Aby uprościć rachunki, rozważmy prostokąt znormalizowany o bokach długości $1\times h$, gdzie $h=\frac{b}{a}>1$. Dynamicznie zmieniające się położenia zgięć dla wierzchołka zginanego rogu umiejscowionego na dłuższym boku przedstawiają rysunki 4–10. (Nietrudno przekonać się, że jeśli wierzchołek zgięcia będzie na krótszym boku, to długość zgięcia będzie krótsza od tej z konfiguracji z rys. 10.)



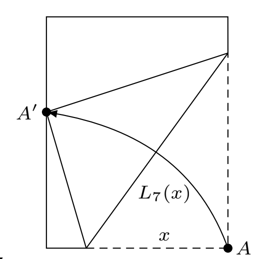
Rys. 4



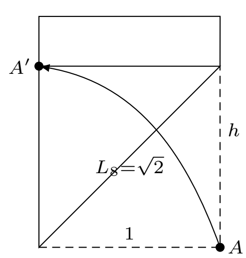
Rys. 5



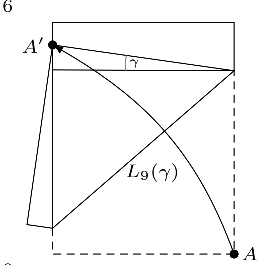
Rys. 6



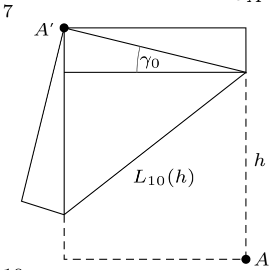
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

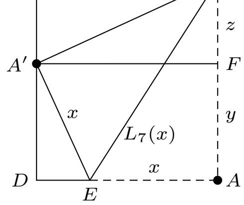


Rys. 10

Które z tych zgięć jest najdłuższe i w jakich warunkach? Kandydatów jest dwóch − to zgięcia z rysunków 6 i 8. Skąd taki wybór?

Zgięcie na rysunku 5 ma długość $L_5(\alpha)=\frac{h}{\cos\alpha}$, gdzie $\alpha\in(0,\alpha_0)$ i $\alpha_0<\frac{\pi}{4}$ jest takie jak na rysunku 6. Ponieważ $L'(\alpha)=\frac{h\sin\alpha}{\cos^2\alpha}>0$, więc wielkość $L_5(\alpha)$ rośnie wraz ze wzrostem argumentu α, aż do osiągnięcia położenia granicznego z rysunku 6.

Podpowiedź 2. *Wykazać, że dla prostokąta* $1\times h$ $(h>1)$ *długość zgięcia z rysunku 6 jest określona wzorem* $L_6(h)=\sqrt{2h^4-2h^3\sqrt{h^2-1}}$.



Rys. 11

Dalsza wędrówka punktu A' wzdłuż boku prostokąta wymusza pojawienie się przypadku przedstawionego na rysunku 7. Obliczenie długości zgięcia $L_7(x)$ jako funkcji parametru $|AE|=x\in(\frac{1}{2},1)$ jest łatwe (rys. 11).

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do $\triangle DEA'$ mamy $y^2 = x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1$, a z podobieństwa trójkątów $\triangle DEA' \sim \triangle FGA'$,

$$\frac{|FG|}{|FA'|} = \frac{|DE|}{|DA'|}, \quad \text{skąd} \quad yz = 1 - x \quad \text{oraz} \quad z^2 = \frac{(1-x)^2}{y^2} = \frac{(1-x)^2}{2x-1}.$$

Ponownie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla $\triangle EAG$,

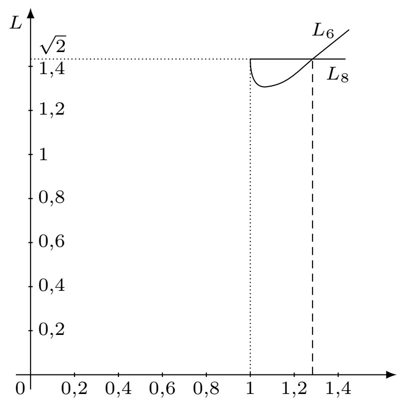
$$[L_7(x)]^2 = x^2 + (y+z)^2 = x^2 + y^2 + 2yz + z^2 = \ldots = \frac{2x^3}{2x-1}, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dx}\Big([L_7(x)]^2\Big) = \frac{2x^2(4x-3)}{(2x-1)^2} < 0 \ \text{ dla } \ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4},$$

więc długość zgięcia najpierw maleje, osiąga minimum lokalne dla $x = \frac{3}{4}$, a później wzrasta do wielkości $L_8(h) = \sqrt{2}$ (patrz rys. 8). Gdy punkt A' wędruje dalej w górę (rys. 9), pojawia się kolejna pułapka.

Podpowiedź 3. *Wykazać, że dla prostokąta $1 \times h$ $(h > 1)$ przy oznaczeniach takich jak na rysunku 9, długość zgięcia jest określona wzorem $L_9(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{1+\sin\gamma}}$, gdzie $0 < \gamma < \gamma_0$ i $\gamma_0 < \frac{\pi}{2}$ jest takie jak na rysunku 10.*



Rys. 12

Ponieważ $[L_9(\gamma)]' = \dfrac{-\sqrt{1+\sin\gamma}\cdot\cos\gamma}{\sqrt{2}(1+\sin\gamma)^2} < 0$, więc w tym przypadku długość zgięcia maleje do osiągnięcia wartości granicznej $L_{10}(h)$ (patrz rys. 10).

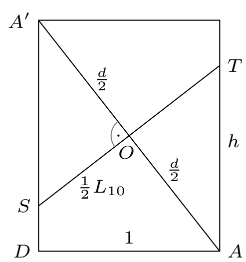
Z powyższych rozważań wynika, że rozwiązaniem zadania Hardy'ego dla prostokąta o wymiarach $1 \times h$ $(h > 1)$ jest funkcja

$$L_{\max}(h) = \max\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2h^4 - 2h^3\sqrt{h^2-1}}\right\} \quad \text{dla} \quad h > 1.$$

Porównując wykresy funkcji $L_6(h) = \sqrt{2h^4 - 2h^3\sqrt{h^2-1}}$ i $L_8(h) = \sqrt{2}$ dla $h > 1$ (rys. 12), widzimy, że jedynie dla prostokąta o wysokości $h = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$ istnieją dwa różne położenia zgięć o takich samych największych długościach (rys. 6 i 8).

W zadaniu 1 nie mówimy o zgięciu najmniejszej długości, bo jest ono długości 1 (wystarczy kartkę o wymiarach $1 \times h$ $(h > 1)$ złożyć na pół tak, aby pokrywały się krótsze boki).

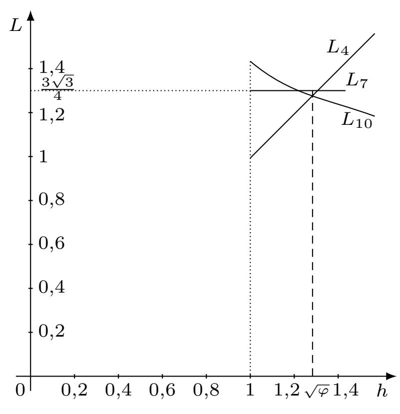
Mniej trywialna jest następująca sytuacja:



Rys. 13

Zadanie 2. *Zginamy prostokątną kartkę papieru w ten sposób, że koniec dłuższego boku leży na dłuższym boku przeciwległym. Kiedy długość tego zgięcia jest najmniejsza?*

Wcześniejsza dyskusja uprawnia nas do szukania rozwiązania wśród przypadków z rysunków 4, 7 i 10. Jak już wiemy, $L_4(h) = h$, a funkcja $L_7(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{2x-1}}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, osiąga minimum lokalne dla $x_0 = \frac{3}{4}$, które jest równe $L_7(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Obliczenie długości zgięcia w ostatnim przypadku (rys. 10) jest łatwe.



Rys. 14

Przy oznaczeniach takich jak na rysunku 13, z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $\triangle DAA'$ wynika $d^2 = 1 + h^2$. Z podobieństwa trójkątów $\triangle DAA' \sim \triangle OSA'$ mamy $\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{2}L_{10}}{\frac{1}{2}d}$, skąd $L_{10}(h) = \frac{\sqrt{1+h^2}}{h}$, gdzie $h > 1$.

Porównując wykresy funkcji $L_4(h) = h$, $L_7(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $L_{10}(h) = \frac{\sqrt{1+h^2}}{h}$ dla $h > 1$ (rys. 14), widzimy, że wartość minimum lokalnego z przypadku na rysunku 7 nigdy (!) nie jest zgięciem o najmniejszej długości. Rozwiązaniem zadania 2 dla prostokąta o wymiarach $1 \times h$, $(h > 1)$, jest funkcja

$$L_{\min}(h) = \min\left\{h, \frac{\sqrt{1+h^2}}{h}\right\} \quad \text{dla} \quad h > 1.$$

Jedynie dla $h = \sqrt{\varphi}$, gdzie $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (złota liczba), istnieją dwa różne zgięcia o najmniejszej długości (rys. 4 i 10).

Tak oto rozwiązanie naturalnie wyglądającego i pozornie łatwego zadania okazało się zaskakująco nieoczywiste.