Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2021

Zadania z matematyki nr 813, 814

Redaguje Marcin E. KUCZMA

813. Dany jest wielokąt wypukły W (kąty $< 180°$) oraz liczba naturalna m, mniejsza od liczby jego przekątnych. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów przecięć przekątnych (leżących wewnątrz W); zakładamy, że żaden z tych punktów nie należy do trzech przekątnych. Udowodnić, że w zbiorze S można wyróżnić m-elementowy podzbiór M, nie zawierający żadnego cyklu. Przez *cykl* rozumiemy dowolny cykliczny układ punktów (dowolnej długości $\geqslant 3$), w którym każde sąsiednie dwa punkty leżą na jednej przekątnej, ale żadne kolejne trzy nie leżą na jednej przekątnej.

814. W pewnym trójkącie jeden z kątów ma miarę α. Dowieść, że

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\geqslant\frac{r}{R},$$

gdzie, jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego.

Zadanie 814 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2020

Przypominamy treść zadań:

805. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_{i+1} jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1}=A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

806. Nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1=2$; $a_{n+1}=2^{a_n}+2$ dla $n\geqslant 1$. Niech $f(x)=x^2-x$. Udowodnić, że dla każdego $n\geqslant 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

805. Odpowiedź dla $n\geqslant 4$: nie; dla $n=3$: tak.

Banalny kontrprzykład dla $n\geqslant 4$: umieszczamy punkty P, A_1, A_2, A_3 w wierzchołkach kwadratu. Zakreślamy okrąg o środku P, przechodzący przez punkty A_1, A_3, i na jego długim łuku A_3A_1 wybieramy punkty $A_4,\ldots,A_n$ tak, by punkt P znalazł się wewnątrz wielokąta $A_1A_2A_3\ldots A_n$; ów wielokąt ma własności wymienione w pierwszym zdaniu zadania, ale nie ma okręgu opisanego.

Dowód dla $n=3$: gdyby w trójkącie $A_1A_2A_3$ dwa kąty spośród A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1 były ostre, ich suma byłaby kątem wypukłym i punkt P leżałby na zewnątrz trójkąta $A_1A_2A_3$. Wobec tego dwa spośród tych kątów – np. A_1PA_2, A_2PA_3 są nieostre; podstawami trójkątów równoramiennych PA_1A_2, PA_2A_3 są wtedy odcinki A_1A_2, A_2A_3; ich boczne ramiona PA_1, PA_2, PA_3 mają równe długości, więc P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A_1A_2A_3$.

806. Pokażemy, że dla każdego $n\geqslant 1$:

$$(1)\qquad a_n\mid a_{n+1}\quad\text{oraz}\quad(a_n-1)\mid(a_{n+1}-1).$$

Stąd oczywiście wyniknie, że $a_{n+1}(a_{n+1}-1)$ dzieli się przez $a_n(a_n-1)$, czyli że $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

Dla $n=1$ podzielność (1) zachodzi ($a_1=2$, $a_2=6$). Ustalmy $n\geqslant 2$ i przyjmijmy słuszność związków (1) z n zastąpionym przez $n-1$. Oznaczmy: $a_{n-1}=k$, $a_n=l$, $a_{n+1}=m$; tak więc $l=2^k+2$, $m=2^l+2$. Założenie indukcyjne mówi, że dla pewnych liczb naturalnych q, t mamy

$$(2)\qquad l=qk,\qquad l-1=t(k-1).$$

Liczby k, l (jak i wszystkie wyrazy ciągu (a_n)) są parzyste, niepodzielne przez 4. Zatem liczby q, t w równaniach (2) są nieparzyste. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej x:

$$\text{liczby } x^q+1 \text{ oraz } x^t+1 \text{ są podzielne przez } x+1.$$

Przyjmijmy (odpowiednio) $x=2^k$ oraz $x=2^{k-1}$. Dostajemy związki podzielności:

$$2^k+1\mid 2^{kq}+1\quad\text{oraz}\quad 2^{k-1}+1\mid 2^{(k-1)t}+1,$$

czyli (zgodnie z (2)):

$$2^k+1\mid 2^l+1\quad\text{oraz}\quad 2^{k-1}+1\mid 2^{l-1}+1.$$

Pierwszy z tych związków mówi, że $l-1\mid m-1$; drugi zaś (po pomnożeniu obu członów przez 2) – że $l\mid m$. Są to właśnie związki (1) dla rozważanej liczby n, czyli teza indukcyjna. Zatem związki (1) zachodzą dla każdej liczby naturalnej n.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 803 ($WT=1{,}44$) i 804 ($WT=2{,}58$) z numeru 6/2020

Andrzej Kurach	Ryjewo	47,55
Karol Matuszewski	Rawicz	44,69
Janusz Olszewski	Warszawa	43,43
Marek Spychała	Warszawa	42,98
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,77
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58

Pan Andrzej Kurach – już po raz drugi. A pan Karol Matuszewski właśnie wchodzi do matematycznego Klubu 44, który dzięki niemu liczy (na zakończenie sezonu 2019/20) już 133 nazwiska!

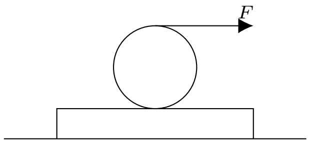
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2021

Zadania z fizyki nr 710, 711

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

710. W bocznej ściance prostopadłościennego naczynia wypełnionego cieczą o współczynniku załamania n znajduje się niewielki otwór o promieniu r. Z wnętrza naczynia przez środek otworu skierowano poziomą wiązkę światła. Do jakiego poziomu nad otworem powinna wyciec ciecz, aby promień światła opuścił wyciekającą strugę, ani razu nie ulegając całkowitemu wewnętrznemu odbiciu? Zaniedbać zmiany przekroju poprzecznego strumienia. Współczynnik załamania cieczy jest dostatecznie duży.

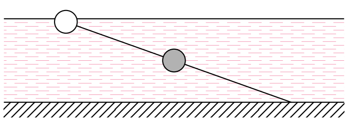


Rys. 1

711. Na dwóch równoległych jednakowych deskach o łącznej masie m leży pełny walec o masie m_1 (widok z boku przedstawia rys. 1). Na walec nawinięto nieważki sznurek, którego koniec ciągniemy poziomą siłą F. Oś walca jest prostopadła do desek, a jego środek i siła F znajdują się w płaszczyźnie pionowej przechodzącej pośrodku między deskami. Walec toczy się po deskach bez poślizgu, nie ma tarcia między deskami a podłożem. Znaleźć przyspieszenie desek. Zakładamy, że oś walca nie zmienia swego kierunku podczas ruchu.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2020

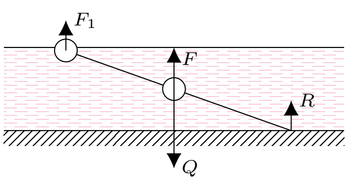
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

702. Ciężką kulkę przymocowano do środka cienkiego pręta, a kulkę lekką o takim samym promieniu przymocowano do jednego z końców pręta. Układ zanurzono w niezbyt głębokiej wodzie (rys. 2). Pręt jest pochylony, jego swobodny koniec opiera się o dno, z wody wystaje część lekkiej kulki, przy czym stosunek objętości części wynurzonej do objętości całej kulki wynosi n. Czy w głębokiej wodzie układ będzie pływał, czy utonie? Należy przyjąć, że masy pręta i lekkiej kulki są zaniedbywalne.

703. Gdy do ciężarka o masie m zawieszonego na sprężystej nici przykładamy siłę działającą pionowo w dół, której wartość rośnie stopniowo od zera, nić ulegnie zerwaniu, gdy przyłożona siła osiągnie wartość F. Jaką stałą minimalną siłą należy działać, aby nić uległa zerwaniu?



Rys. 3

702. Na rysunku 3 przedstawione są siły działające na układ w płytkiej wodzie. Na ciężką kulkę działa siła ciężkości Q i siła wyporu F. Siła wyporu działająca na lekką kulkę jest proporcjonalna do objętości części zanurzonej w wodzie i wynosi $F_1 = F(1-n)$. Na swobodny koniec pręta działa skierowana pionowo siła reakcji R. Z warunku równowagi momentów sił względem środka ciężkiej kulki otrzymujemy warunek $R = F(1-n)$. Warunek równowagi sił działających na układ ma postać $Q = F + 2F(1-n) = F(3-2n)$. W głębokiej wodzie maksymalna wartość siły wyporu przy całkowitym zanurzeniu obu kulek wynosi $2F$. Jeżeli jest ona większa od siły ciężkości Q, to układ będzie pływał w położeniu pionowym, a znajdująca się wyżej lekka kulka będzie częściowo wynurzona z wody. Warunek pływania na głębokiej wodzie ma więc postać $Q = F(3-2n) < 2F$, stąd $n > 1/2$. Oznacza to, że układ nie utonie, jeśli w płytkiej wodzie lekka kulka jest wynurzona z wody o więcej niż połowę swojej objętości.

703. Niech $x_{\max}$ oznacza wydłużenie nici, gdy ulega ona rozerwaniu. Podczas powolnego rozciągania siły działające na ciężarek równoważą się, spełnione jest więc równanie $kx_{\max} = F + mg$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości nici. Oznaczmy przez x_1 rozciągnięcie nici z ciężarkiem w stanie równowagi, przez F_1 szukaną stałą siłę, która spowoduje zerwanie nici, a przez x_2 dodatkowe rozciągnięcie nici przed zerwaniem. Z zasady zachowania energii mamy $kx_1^2/2 + (mg + F_1)x_2 = k(x_1 + x_2)^2/2$. Uwzględniając, że $x_1 = mg/k$, otrzymujemy: $x_2 = 2F_1/k$. Ponieważ $x_{\max} = x_1 + x_2$, stała siła powodująca zerwanie nici $F_1 = F/2$ jest dwa razy mniejsza niż maksymalna siła przy powolnym rozciąganiu.

Ten sam wynik otrzymamy zauważając, że po przyłożeniu siły F_1 ciężarek aż do zerwania nici porusza się ruchem harmonicznym, a jego początkowa odległość od nowego położenia równowagi równa jest amplitudzie drgań i wynosi $A = F_1/k$. Zatem dodatkowe rozciągnięcie nici jest równe $x_2 = 2A = 2F_1/k$, jak w poprzednim rozwiązaniu.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.