```
def wariacje(zb: List[str], k: int) -> List[List[str]]:
    if k == 0:
        return []
    elif k == 1:
        return [[e] for e in zb]
    else:
        war = wariacje(zb, k - 1)
        return [[e] + w for e in zb for w in war]
```

Ta wersja funkcji nie bada już wszystkich liczb zadanej długości, lecz jedynie te, które istotnie warto sprawdzać na podstawie obserwacji matematycznych. Warto zwrócić uwagę na użycie rekursji w sposobie zaprogramowania funkcji `wariacje`. Program z nową wersją funkcji `liczby_kandydatki` znajduje wszystkie liczby autobiograficzne w ciągu zaledwie paru sekund. Oto, jak wspaniałe wyniki przynosi współdziałanie matematyki i informatyki!

Uwagi końcowe

W podobny sposób można rozwiązać problem liczb autobiograficznych w innych niż dziesiątkowy systemach liczenia. Herb R. Bailey i Roger G. Lautzenheiser w artykule *A Curious Sequence* (Mathematics Magazine, vol. 66, nr 1, 1993) podają twierdzenie:

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 6$ *liczba* $a_0a_1\ldots a_n$ *jest autobiograficzna wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_0 = n-3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n-3} = 1$ *oraz* $a_i = 0$ *dla pozostałych* i.

Twierdzenie to w pełni charakteryzuje „długie” liczby autobiograficzne.

Przygotował Łukasz BOŻYK

Zadania

M 1657. Przy dwóch n-osobowych stołach usiadło $2n$ osób. Co minutę pewne dwie osoby, które nie siedzą przy tym samym stole, zamieniają się miejscami. Przypuśćmy, że *każda para* osób zamieniła się miejscami *dokładnie raz* (czyli upłynęło $n(2n-1)$ minut).

(a) Udowodnić, że składy osób przy stołach są takie same jak na początku, tzn. jeśli na początku pewne dwie osoby siedziały przy tym samym stole, to po upływie $n(2n-1)$ minut również siedzą przy tym samym stole.
(b) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie na str. 21

M 1658. W turnieju wzięło udział n osób ($n \geqslant 4$). *Każda para* osób rozegrała *dokładnie jeden* mecz, który zakończył się zwycięstwem jednej z nich. Po turnieju wszyscy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy wygrał z osobą siedzącą bezpośrednio po swojej prawej stronie. Wykazać, że można tak pewną osobę wyprosić, a pozostałe przesadzić, aby ta własność pozostała zachowana, tzn. każdy miał na prawo osobę, z którą wygrał.

Rozwiązanie na str. 5

M 1659. Dany jest basen w kształcie pierścienia kołowego, podzielony na $2n$ małych zbiorników poprzedzielanych zawieszonymi nad wodą obręczami ($n \geqslant 2$). W każdym małym zbiorniku (znajdującym się pomiędzy dwiema obręczami) pływa jeden delfin. Co jakiś czas dwa delfiny z sąsiednich zbiorników wykonują akrobację polegającą na jednoczesnym skoku przez obręcz (znajdującą się między zbiornikami) i w rezultacie – zamianie miejscami. Przypuśćmy, że po pewnym czasie *każde dwa* delfiny zamieniły się miejscami *dokładnie raz.* Wykazać, że pewna obręcz nie została użyta do wykonania żadnej akrobacji.

Rozwiązanie na str. 21