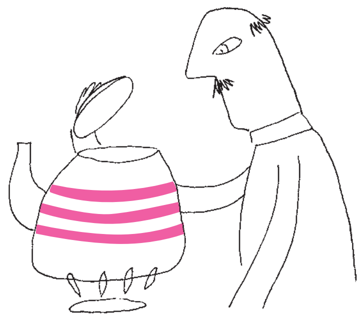

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, i wylosowanie każdej liczby jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo P_n rozważanego zdarzenia wynosi dokładnie

$$P_n = \frac{\lfloor n/m \rfloor}{n} \quad \text{i oczywiście} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{m}.$$

Należy więc uznać (można to łatwo sformalizować), iż prawdopodobieństwo zdarzenia E_m, że dwie **niezależnie** wylosowane liczby całkowite a, b są obie podzielne przez m, wynosi $1/m^2$. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego E'_m wynosi zatem $1 - 1/m^2$. Niech teraz

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \ldots$$

będzie ciągiem rosnącym wszystkich liczb pierwszych. Zauważmy, że a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy nie są podzielne równocześnie przez żadną liczbę pierwszą p_k, czyli gdy zajdzie zdarzenie $\bigcap_k E'_{p_k}$. Przyda się teraz obserwacja, że jeśli $\mathrm{NWD}(m_1, m_2) = 1$, to zdarzenia E_{m_1} oraz E_{m_2} są niezależne – wynika to stąd, że liczba całkowita dzieli się jednocześnie przez m_1 oraz m_2, gdy dzieli się przez $m_1 m_2$ oraz ze wzoru $1/(m_1 m_2) = 1/m_1 \cdot 1/m_2$. Uogólniając tę obserwację, widzimy, że zarówno (E_{p_k}), jak i (E'_{p_k}) są ciągami zdarzeń niezależnych. W szczególności zachodzi

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{NWD}(a, b) = 1\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_k E'_{p_k}\Big) = \prod_k \mathbb{P}(E'_{p_k}) = \prod_k \Big(1 - \frac{1}{p_k^2}\Big).$$

Już Leonhard Euler zauważył, że dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_k^s}.$$

Formalnie ta tożsamość wynika ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego

$$1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/p_k^s}$$

i twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie każdej liczby naturalnej na iloczyn potęg liczb pierwszych. Wyżej występujące szeregi i iloczyny nieskończone są rzeczywiście zbieżne, ale mówi się, że Euler specjalnie tym się nie przejmował. Geniusz Eulera przejawił się jednak szczególnie wtedy, gdy obwieścił światu, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

i przedstawił wyprowadzenie tego wyniku. Jak na dzisiejsze standardy ścisłości matematycznej jego uzasadnienie nie było do końca zadowalające, ale w zasadzie poprawne. To, że powyższy szereg, tylko niewinnie różniący się od szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots = 1,$$

ma tak intrygującą sumę, zakrawa na *cud*!

Patrz odpowiedni przypis na wcześniejszej stronie: Euler się zdarza raz na ludzkość!

Naszkicowaliśmy zatem dowód faktu, że przeznaczeni sobie mają więcej niż 3 szanse na 5, że nikt im nie stanie na przeszkodzie.

Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1013. Rowerzysta jedzie z prędkością $v = 8$ m/s wzdłuż prostej, poziomej drogi. Las rosnący po obu stronach drogi osłania ją od wiatru. Poza lasem, prostopadle do drogi, wiatr wieje z prędkością $u = 6$ m/s. Ile razy większą mocą rowerzysta musi napędzać rower, jeśli chce utrzymać stałą prędkość jazdy po wyjechaniu spod osłony lasu.
Wskazówka: siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości poruszającego się względem niego ciała.
Rozwiązanie na str. 6

F 1014. Szereg promieniotwórczy rozpoczynający się izotopem ^{238}U, o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 4{,}47 \cdot 10^9$ lat, kończy stabilny izotop ^{206}Pb. Jaką objętość V, w warunkach normalnych, wypełniłby dzisiaj hel, który powstał w wyniku rozpadu $m = 1$ kg ^{238}U obecnego w chwili powstania Ziemi? Wiek Ziemi oceniany jest na $t_Z \approx 4{,}54 \cdot 10^9$ lat.
Rozwiązanie na str. 5