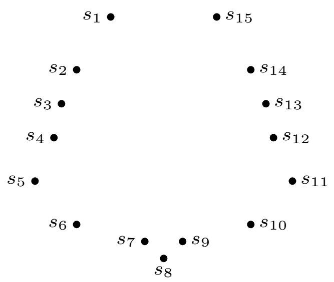
Odkryj wielokąt!

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Punkty z rysunku 1, jako środki kolejnych boków wielokąta, kodują pewien obrazek. Czy potrafisz go odtworzyć? Spróbuj! Rozpatrzmy sytuację ogólną.



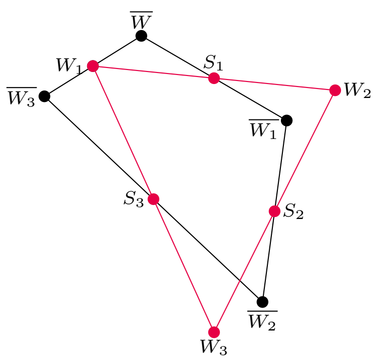
Rys. 1

Problem. *Czy (jak?, kiedy?) można odtworzyć wielokąt, gdy znamy środki jego kolejnych boków?*

Rozpoczniemy od prostego przypadku, gdy na płaszczyźnie dane są trzy różne punkty S_1, S_2, S_3. Zbudujemy trójkąt $\triangle W_1W_2W_3$ taki, że punkty S_i są środkami jego boków. Pokażemy jednocześnie, że złożenie trzech (ogólnie nieparzystej liczby $\geqslant 3$) symetrii środkowych jest symetrią środkową.

Gdy będzie to dla nas wygodne, na punkty płaszczyzny będziemy patrzeć jak na wektory zaczepione w początku układu współrzędnych (oznaczenia wektorów pomijamy).

Wybieramy na płaszczyźnie punkt $\overline{W}$ różny od wszystkich punktów S_i. Symetryczne odbicie punktu $\overline{W}$ względem punktu S_1 wyznacza punkt $\overline{W_1}$, symetryczne odbicie punktu $\overline{W_1}$ względem S_2 daje punkt $\overline{W_2}$, a symetryczne odbicie punktu $\overline{W_2}$ względem S_3 wyznacza punkt $\overline{W_3}$ (rys. 2). Takie przekształcenie płaszczyzny $\overline{W} \to \overline{W_3}$ jest symetrią środkową.



Rys. 2

Istotnie, eliminując $\overline{W_1}$ i $\overline{W_2}$ z równań opisujących warunki symetrii

$$\overline{W_1} = 2S_1 - \overline{W}, \quad \overline{W_2} = 2S_2 - \overline{W_1}, \quad \overline{W_3} = 2S_3 - \overline{W_2},$$

otrzymujemy wzór $\overline{W_3} = 2(S_1 - S_2 + S_3) - \overline{W}$, a stąd poszukiwany środek symetrii

$$\frac{\overline{W_3} + \overline{W}}{2} = S_1 - S_2 + S_3.$$

Jako jedyny punkt stały przekształcenia $\overline{W} \to \overline{W_3}$, punkt $W_1 = \frac{1}{2}(\overline{W_3} + \overline{W})$ jest jednym z wierzchołków trójkąta $\triangle W_1W_2W_3$, który łatwo wyznaczyć (rys. 2).

Rozumowanie to działa w przypadku każdej nieparzystej liczby różnych punktów $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$ ($k \geqslant 1$) płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta. Proponujemy samodzielnie przeprowadzić tę konstrukcję dla punktów S_i z rysunku 1 – rozwiązanie (o świątecznym charakterze) na stronie 11.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będące środkami kolejnych boków wielokąta. Pokażemy, że w tym przypadku złożenie symetrii środkowych jest translacją.

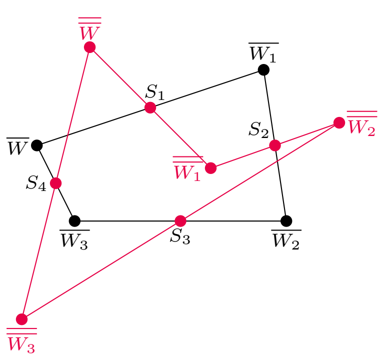
Wybieramy na płaszczyźnie punkt $\overline{W}$ różny od każdego z punktów S_i. Symetryczne odbicie punktu $\overline{W}$ względem punktu S_1 daje punkt $\overline{W_1}$, symetryczne odbicie punktu $\overline{W_1}$ względem S_2 wyznacza punkt $\overline{W_2}$, symetryczne odbicie punktu $\overline{W_2}$ względem S_3 daje $\overline{W_3}$ i wreszcie symetryczne odbicie punktu $\overline{W_3}$ względem S_4 wyznacza punkt $\overline{W_4}$. Eliminując punkty $\overline{W_1}$, $\overline{W_2}$, $\overline{W_3}$ z warunków symetrii

$$\overline{W_1} = 2S_1 - \overline{W}, \quad \overline{W_2} = 2S_2 - \overline{W_1}, \quad \overline{W_3} = 2S_3 - \overline{W_2}, \quad \overline{W_4} = 2S_4 - \overline{W_3},$$

otrzymujemy

$$\overline{W_4} = 2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1) + \overline{W},$$

co oznacza, że przekształcenie płaszczyzny $\overline{W} \to \overline{W_4}$ jest translacją o wektor $2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1)$. Gdy jest to translacja o wektor niezerowy, nie istnieje czworokąt, którego środki boków są zadanymi wcześniej punktami (gdyż jeden z wierzchołków tego czworokąta musiałby być punktem stałym wspomnianej translacji).



Rys. 3

Równość $\overline{W} = \overline{W_4}$ (czyli istnienie czworokąta spełniającego warunki zadania) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_2 + S_4}{2} = \frac{S_1 + S_3}{2},$$

czyli gdy środek odcinka łączącego punkty S_2 i S_4 pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego punkty S_1 i S_3. Wówczas czworokątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele, punkt $\overline{W}$ (lub $\overline{\overline{W}}$), różny od każdego punktu S_i, możemy wybrać dowolnie (rys. 3).

Rozumowanie to pozostaje prawdziwe dla dowolnej parzystej liczby różnych punktów płaszczyzny $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$ ($k \geqslant 2$) będących środkami kolejnych boków wielokąta. Odkryliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Edward Kasner, 1903). *Niech $S_1, S_2, \ldots, S_i$ ($i \geqslant 3$) będą różnymi punktami płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta.*

(a) *Jeżeli i jest liczbą nieparzystą ($i = 2k+1,\ k \geqslant 1$), to istnieje dokładnie jeden wielokąt $W_1W_2\ldots W_i$ taki, że*

$$(*) \qquad S_j = \frac{1}{2}(W_j + W_{j+1}),\ j = 1, 2, \ldots, i,\ \text{gdzie } W_{i+1} = W_1.$$

(b) *Jeżeli i jest liczbą parzystą ($i = 2k,\ k \geqslant 2$), to wielokąt $W_1W_2\ldots W_i$ spełniający warunek $(*)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2k-1} = S_2 + S_4 + \ldots + S_{2k}$.*

Punkt (b) geometrycznie oznacza, że zbiory punktów S_j o indeksach nieparzystych oraz parzystych mają ten sam środek ciężkości. Wówczas takich wielokątów jest nieskończenie wiele i dowolny punkt płaszczyzny różny od punktów S_j może pełnić rolę wierzchołka W_1.

Powyższe uwagi nie wyczerpują zagadnienia. Rozważania można prowadzić, rozpatrując dla $i \geqslant 4$ „wieloboki przestrzenne".

Opisana sytuacja to prosta ilustracja działania skończonych szeregów Fouriera, ogólniej – analizy harmonicznej, która z małego zbioru informacji stara się odtworzyć ogólniejsze zjawisko. Czasem można to zrobić bardzo precyzyjnie, innym razem tylko w ogólnym zarysie, a czasem jest to niemożliwe.

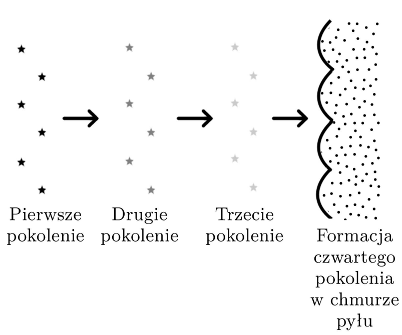
Collect and Collapse: obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd

*Miguel FIGUEIRA**

* Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

W połowie XX wieku astronomowie zaobserwowali kilka niezwiązanych ze sobą grawitacyjnie skupisk gwiazd wysokomasowych typu OB (tzw. asocjacji gwiazdowych OB). Okazało się, że każda z tych grup zawiera gwiazdy mniej więcej w tym samym wieku, co może sugerować, że formowanie się gwiazd w tych obszarach następowało w sposób sekwencyjny: pierwsza generacja spowodowała uformowanie drugiego pokolenia gwiazd o dużych masach, druga – trzeciego i tak dalej (rys. 1). Ten prosty, sekwencyjny scenariusz może wyjaśnić, w jaki sposób gwiazdy w każdej z zaobserwowanych podgrup znajdują się w tej samej lub bardzo zbliżonej fazie ewolucji.

Gwiazdy typu OB to gorące, masywne gwiazdy widmowe typu O (hiperolbrzymy o temperaturze powierzchni 25 000–50 000 K i masach >16 $M_\odot$) lub wczesnego typu B (jasne, masywne, 2,1–16 $M_\odot$, olbrzymy o temperaturze 10 000–30 000 K), które tworzą się w luźno zorganizowanych grupach zwanych stowarzyszeniami OB. Oba typy gwiazdowe są bardzo masywne i krótko żyjące, dlatego nie oddalają się zbyt od miejsca swojego powstania.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie sekwencyjnego scenariusza tworzenia się gwiazd z uformowanymi trzema pokoleniami i czwartym pokoleniem gwiazd tworzącym się w chmurze pyłu. Strzałki wskazują, że do powstania drugiego i wyższych pokoleń gwiazd przyczyniła się bezpośrednio podgrupa wcześniejsza

Gwiazdy o masach większych niż 8 $M_\odot$ nazywane są gwiazdami o dużej masie.

Terminem H II astronomowie określają zjonizowany wodór atomowy (obszar H I to obłok neutralnego wodoru atomowego, a H_2 to wodór cząsteczkowy). W artykule „Gwiezdne przedszkola – obszary H II w galaktyce" (Δ^4_{20}), opisałem tworzenie się zjonizowanych (H II) regionów wokół gwiazd o dużych masach. Zasadniczo gwiazdy o dużej masie emitują fotony w zakresie ultrafioletowych (UV) długości fal elektromagnetycznych, które jonizują chmurę wodoru wokół nich. Kiedy liczba jonizacji jest równa liczbie rekombinacji, obszar H II osiąga swoją początkową wielkość nazywaną sferą Strömgrena. Po utworzeniu sfery Strömgrena ciśnienie jonizacji wewnątrz obszaru H II jest większe niż ciśnienie otaczającej go chmury. Ta różnica ciśnień powoduje rozpoczęcie fazy ekspansji. Naddźwiękowy front jonizacyjny (IF) tworzy front uderzeniowy (SF), który następnie ścieśnia chmurę (Δ^4_{20}). Poprzez rozszerzanie się coraz więcej materiału gromadzi się pomiędzy frontami. Stabilne ciśnienie utrzymywane pomiędzy frontami IF a SF sprawia, że chmura (w kształcie torusa) jest odporna na zapadanie grawitacyjne, aż do momentu osiągnięcia gęstości krytycznej, powyżej której utrzymywany pomiędzy frontami materiał rozpada się na kawałki. Powstałe w ten sposób fragmenty będą stanowiły siedlisko dla kolejnych pokoleń gwiazd. Mechanizm ten, w którym nowe pokolenie gwiazd jest konsekwencją gromadzenia się (*collect*)