# Nigdy Cię nie zobaczę?

*Kamila ŁYCZEK*, Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niniejszy tekst nawiązuje do artykułu *Widoczność w nieskończonym lesie*, $\Delta^4_{20}$.

– *Hop, hop, jest tam kto?* – krzyczy $\alpha$ otoczona tłumem.
– *Hop, hop, spójrz tutaj.* – odpowiada $\beta$, który co prawda słyszy $\alpha$, ale zupełnie jej nie widzi.
– *Jakie „tutaj"? Przecież dookoła nie ma żywej duszy.* – $\alpha$ otoczona tłumem po raz kolejny usiłuje dostrzec $\beta$ pośród otaczającej pustki.

Dookoła ludzi tłum, a jakby nikogo nie było... Przyjrzyjmy się światu, w którym $\alpha$ i $\beta$ próbują się bezskutecznie dostrzec. Na zwykłej płaszczyźnie

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

w każdym jej punkcie o wymiernych współrzędnych $(x, y)$ siedzi samotny człowiek i... wypatruje towarzysza, kierując tęsknie wzrok w losowo obranym kierunku. Ten losowy kierunek jest wyznaczony przez wybór punktu na ruletce o promieniu 1 – zadekretowane prawdopodobieństwo wylosowania półprostej wzroku przebijającej brzeg ruletki na łuku $A$ wynosi $[A]/2\pi$ ($[A]$ oznacza długość łuku $A$). Oczywiście każdy ma swoją osobistą ruletkę i każdy *wykręca* kierunek swojego spojrzenia niezależnie.

Dla $\alpha \in \mathbb{Q}^2$ niech $Z_\alpha$ oznacza zdarzenie, że $\alpha$ kogoś widzi. Wykażemy, że $\mathbb{P}(Z_\alpha) = 0$, niestety... Zauważmy, że moc zbioru prostych $\alpha\beta$, gdzie $\beta \in \mathbb{Q}^2$, $\beta \neq \alpha$, jest nie większa niż moc zbioru punktów $\beta \in \mathbb{Q}^2$, $\beta \neq \alpha$. Oznacza to, że moc zbioru tych prostych jest przeliczalna – stąd teza.

Ale nie tylko $\alpha$ nikogo nie widzi. Ponieważ miara probabilistyczna jest przeliczalnie addytywna, więc również

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^2} Z_\alpha\Big) = 0.$$

Zatem zdarzenie przeciwne jest pewne

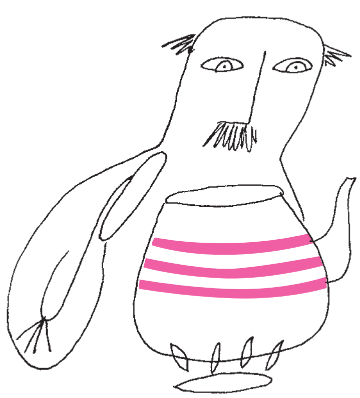
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}^2} Z'_\alpha\Big) = 1,$$

czyli **prawie na pewno nikt nikogo nie widzi**. Zauważmy, że założenie o niezależności rozglądania się różnych osób jest w zasadzie zbędne.

*Cud* to z definicji zjawisko, które zdarza się z prawdopodobieństwem 0.

No dobrze... Wiemy skądinąd, że zdarzenie niemożliwe może się zdarzyć. Wyobraźmy sobie, że jakimś *cudem* $\alpha$ spojrzała w przestrzeń tak, że zobaczyła swoją drugą połówkę, którą jest $\beta$ (oczywiście $\beta \neq \alpha$). Mimo cudu nie zdołają się zobaczyć! Na drodze między $\alpha$ i $\beta$, dokładnie w połowie, stoi bowiem $\gamma = \alpha/2 + \beta/2$ (rzecz jasna $\gamma \in \mathbb{Q}^2$). Oznacza to, że $\alpha$ nie widzi $\beta$, ponieważ jest zasłonięty przez $\gamma$. Oczywiście z podobnych powodów $\alpha$ nie widzi $\gamma$. Idąc dalej tym tropem, dochodzimy do wniosku, że **na pewno (bez wyjątków i cudów) nikt nie widzi nikogo** (bez żadnego modelu probabilistycznego!).

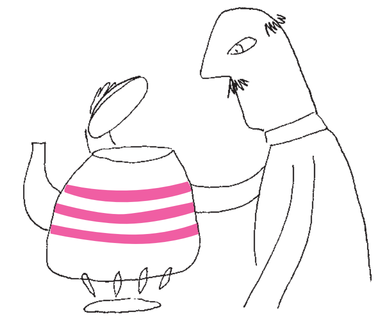
Hmm... Coś jest nie tak w naszym świecie – po prostu ludzie siedzą za gęsto i to prowadzi do powyższych paradoksów interpretacyjnych. Zmieńmy ten świat na lepszy! Usadowmy ludzi wyłącznie w punktach kraty całkowitoliczbowej $\mathbb{Z}^2$. Oczywiście wcześniejszy model probabilistyczny znowu jest użyteczny i daje pewien wgląd w beznadziejną sytuację ludzkości: **nikt nie dostrzega innych, prawie na pewno**.



Pojawia się jednak naturalne pytanie o prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo sobie przeznaczeni $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ oraz $\beta \in \mathbb{Z}^2$ mogą się zobaczyć, jeśli spojrzą we właściwym kierunku. Niech zatem $\alpha = (a_1, a_2)$ oraz $\beta = (b_1, b_2)$. Łatwo, *nomen omen*, widzieć, że $\alpha$ i $\beta$ mogą się zobaczyć wtedy i tylko wtedy, gdy nikt nie stoi im na drodze, czyli $\mathrm{NWD}(b_2 - a_2, b_1 - a_1) = 1$. Dowodzi się w teorii liczb, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}\{(a,b) | a, b \in \{1, 2, \ldots, N\}, \mathrm{NWD}(a,b) = 1\}}{N^2} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}6079.$$

Oto szkic rozumowania prowadzącego do tego intrygującego wyniku. Niech $m > 1$ będzie dowolną, ale ustaloną liczbą naturalną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując spośród liczb naturalnych, otrzymamy taką, która będzie podzielna przez $m$? Intuicja podpowiada, że $1/m$: jeśli losujemy tę liczbę ze zbioru



$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, i wylosowanie każdej liczby jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo $P_n$ rozważanego zdarzenia wynosi dokładnie

$$P_n = \frac{\lfloor n/m \rfloor}{n} \quad \text{i oczywiście} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{m}.$$

Należy więc uznać (można to łatwo sformalizować), iż prawdopodobieństwo zdarzenia $E_m$, że dwie **niezależnie** wylosowane liczby całkowite $a, b$ są obie podzielne przez $m$, wynosi $1/m^2$. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $E'_m$ wynosi zatem $1 - 1/m^2$. Niech teraz

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \ldots$$

będzie ciągiem rosnącym wszystkich liczb pierwszych. Zauważmy, że $a$ i $b$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy nie są podzielne równocześnie przez żadną liczbę pierwszą $p_k$, czyli gdy zajdzie zdarzenie $\bigcap_k E'_{p_k}$. Przyda się teraz obserwacja, że jeśli $\mathrm{NWD}(m_1, m_2) = 1$, to zdarzenia $E_{m_1}$ oraz $E_{m_2}$ są niezależne – wynika to stąd, że liczba całkowita dzieli się jednocześnie przez $m_1$ oraz $m_2$, gdy dzieli się przez $m_1 m_2$ oraz ze wzoru $1/(m_1 m_2) = 1/m_1 \cdot 1/m_2$. Uogólniając tę obserwację, widzimy, że zarówno $(E_{p_k})$, jak i $(E'_{p_k})$ są ciągami zdarzeń niezależnych. W szczególności zachodzi

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{NWD}(a, b) = 1\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_k E'_{p_k}\Big) = \prod_k \mathbb{P}(E'_{p_k}) = \prod_k \Big(1 - \frac{1}{p_k^2}\Big).$$

Już Leonhard Euler zauważył, że dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_k^s}.$$

Formalnie ta tożsamość wynika ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego

$$1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/p_k^s}$$

i twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie każdej liczby naturalnej na iloczyn potęg liczb pierwszych. Wyżej występujące szeregi i iloczyny nieskończone są rzeczywiście zbieżne, ale mówi się, że Euler specjalnie tym się nie przejmował. Geniusz Eulera przejawił się jednak szczególnie wtedy, gdy obwieścił światu, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

i przedstawił wyprowadzenie tego wyniku. Jak na dzisiejsze standardy ścisłości matematycznej jego uzasadnienie nie było do końca zadowalające, ale w zasadzie poprawne. To, że powyższy szereg, tylko niewinnie różniący się od szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \ldots = 1,$$

ma tak intrygującą sumę, zakrawa na *cud*!

Patrz odpowiedni przypis na wcześniejszej stronie: Euler się zdarza raz na ludzkość!

Naszkicowaliśmy zatem dowód faktu, że przeznaczeni sobie mają więcej niż 3 szanse na 5, że nikt im nie stanie na przeszkodzie.

## Zadania

*Przygotował Andrzej MAJHOFER*

**F 1013.** Rowerzysta jedzie z prędkością $v = 8$ m/s wzdłuż prostej, poziomej drogi. Las rosnący po obu stronach drogi osłania ją od wiatru. Poza lasem, prostopadle do drogi, wiatr wieje z prędkością $u = 6$ m/s. Ile razy większą mocą rowerzysta musi napędzać rower, jeśli chce utrzymać stałą prędkość jazdy po wyjechaniu spod osłony lasu.

Wskazówka: siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości poruszającego się względem niego ciała.

Rozwiązanie na str. 6

**F 1014.** Szereg promieniotwórczy rozpoczynający się izotopem $^{238}$U, o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 4{,}47 \cdot 10^9$ lat, kończy stabilny izotop $^{206}$Pb. Jaką objętość $V$, w warunkach normalnych, wypełniłby dzisiaj hel, który powstał w wyniku rozpadu $m = 1$ kg $^{238}$U obecnego w chwili powstania Ziemi? Wiek Ziemi oceniany jest na $t_Z \approx 4{,}54 \cdot 10^9$ lat.

Rozwiązanie na str. 5