Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2021

Zadania z fizyki nr 708, 709

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

708. Na poziomej szorstkiej powierzchni znajdują się dwie jednakowe cienkościenne, puste w środku walce, których osie są równoległe. Jeden walec spoczywa, drugi toczy się w jego kierunku bez poślizgu z prędkością v. Następuje zderzenie sprężyste (tarcie między walcami podczas zderzenia można zaniedbać). Współczynnik tarcia między walcami i powierzchnią wynosi μ. Jaka jest największa odległość między walcami po zderzeniu?

709. Statek kosmiczny oddala się radialnie od Ziemi z prędkością $v = 3c/5$ (c – prędkość światła w próżni). Ze statku nadawana jest audycja radiowa. Czas nadawania audycji w studio na statku $\tau = 30$ min. Jak długo trwa odbiór audycji na Ziemi?

Klub 44 M

Zadania z matematyki nr 811, 812

Redaguje Marcin E. KUCZMA

811. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma tę własność, że każda z funkcji $g(x) = xf(x)$ oraz $h(x) = 2f(2x) - f(x)$ ma granicę 0 przy $x \to 0$. Czy wynika stąd, że także funkcja f ma granicę 0 przy $x \to 0$?

812. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ iloczyn $\prod\limits_{k=2}^{n}(2^k - 2)$ dzieli się przez $n!$.

Zadanie 812 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 801 ($WT = 2{,}36$) i 802 ($WT = 2{,}36$) z numeru 5/2020

Zbigniew Skalik	Wrocław	44,41
Andrzej Kurach	Ryjewo	43,53
Marek Spychała	Warszawa	42,98
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,33
Karol Matuszewski	Rawicz	40,67
Janusz Olszewski	Warszawa	39,41

Pan Zbigniew Skalik – po raz czwarty! Ależ zgęstka pod magiczną linią 44p.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Rozwiązanie zadania M 1657.
(a) Każda osoba zmieniła stół, przy którym siedzi, $2n-1$ razy, czyli nieparzystą liczbę razy. Stąd wniosek, że składy osób przy stołach po prostu się zamieniły.

(b) Udowodnimy indukcyjnie, że jest to możliwe dla każdego $n \geqslant 1$. Przypadek $n = 1$ jest łatwy do rozważenia.
W przypadku $n \geqslant 2$ oznaczmy stoły przez A i B, osoby siedzące przy tych stołach odpowiednio przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Rozważmy następujący ciąg zamian. Najpierw a_n zamienia się miejscami kolejno z $b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n$, w wyniku czego następuje pełna zamiana składów przy stołach. Następnie b_n zamienia się miejscami kolejno z $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$, w wyniku czego przy stole A siedzą osoby $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ oraz b_n, a przy stole B siedzą osoby $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ oraz a_n. Pozostaje zastosować założenie indukcyjne dla wszystkich osób poza a_n i b_n.

Rozwiązanie zadania M 1659.
Zauważmy, że każdy delfin wykonał dokładnie $2n-1$ skoków, a zatem żaden z nich nie mógł opłynąć całego basenu. Dla każdego delfina rozważmy skierowany łuk basenu rozpoczynający się w początkowym zbiorniku delfina, a kończący w jego zbiorniku końcowym. Jeżeli delfin wykonał s skoków zgodnie z ruchem wskazówek zegara (patrząc na basen od góry), to wykonał $2n-1-s$ skoków w przeciwnym kierunku, a zatem jego łuk ma skierowaną długość $2s - 2n + 1$. Łączna długość wszystkich takich łuków jest równa zero, gdyż przy każdej akrobacji długość łuku jednego z uczestniczących w niej delfinów wzrasta o 1, a drugiego – maleje o 1.

Niech z będzie delfinem, który wykonał najwięcej skoków zgodnie z ruchem wskazówek zegara, czyli równoważnie – ma najdłuższy łuk. Zauważmy, że delfin z skakał wyłącznie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Rzeczywiście, gdyby z skoczył w przeciwnym kierunku podczas wspólnej akrobacji z delfinem x, to oznaczałoby, że początkowo x znajdował się we (zegarowo) wcześniejszym zbiorniku, a końcowo w późniejszym, gdyż była to ich jedyna zamiana. W konsekwencji łuk x byłby dłuższy niż łuk z, co jest sprzeczne z wyborem z.

Oznaczmy zbiorniki kolejno liczbami $1, 2, \ldots, 2n$, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przy czym 1 jest początkowym zbiornikiem delfina z. Skoro z wykonał dokładnie $2n-1$ skoków i w każdym z nich numer zbiornika wzrastał o 1, to końcowym zbiornikiem z jest $2n$. Wykażemy, że obręcz między zbiornikami 1 oraz $2n$ nie została użyta do wykonania żadnej akrobacji.

Przypuśćmy przeciwnie – że w pewnym momencie delfin x znajdujący się w zbiorniku 1 zamienił się z delfinem y znajdującym się w zbiorniku $2n$. Ich położenie świadczy o tym, że x zamienił się już wcześniej z z, a y – jeszcze nie. Jednak po skoku przez obręcz między zbiornikami 1 i $2n$ zamiana delfinów y i z przestanie być możliwa, gdyż z skacze tylko zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.