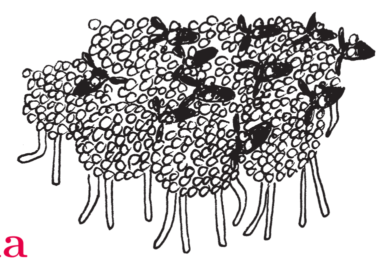
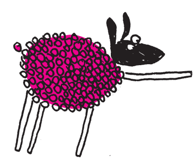
kwadratowych sprzed 90 lat, której prawdziwość udowodnił Gregory Margulis (laureat medalu Fieldsa z 1978 roku). Tytułem wprowadzenia popatrzmy na przypadek form zależących od dwóch zmiennych $x, y \in \mathbb{R}$. Otóż można spostrzec, że wzór $Q(x,y) = x^2 - (\alpha+1)y^2$, gdzie α jest złotą proporcją, tzn. $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ definiuje funkcję $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach: (i) Q jest formą kwadratową, (ii) Q przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (Q nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona), a ponadto (iii) Q nie jest proporcjonalna do formy o współczynnikach wymiernych. Jeśli teraz $x, y \neq 0$ są liczbami całkowitymi, to (wobec $\alpha^2 = \alpha + 1$)

$$|Q(x,y)| = y^2 \left|\frac{x}{y} + \alpha\right| \left|\frac{x}{y} - \alpha\right| \geqslant \alpha y^2 \left|\frac{x}{y} - \alpha\right| \geqslant \alpha C > 0,$$

gdyż złota liczba jest źle aproksymowalna liczbami wymiernymi: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant C/q^2$ dla pewnej stałej $C > 0$ i **dowolnych** $p, q \in \mathbb{N}$! Zatem wartości formy Q przyjmowane na argumentach całkowitych ($(x,y) \neq (0,0)$) są odgraniczone od zera. Słynna hipoteza Oppenheima stanowiła, że jeśli użyjemy więcej zmiennych niż dwie, np. rozpatrując $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełniające własności (i)–(iii) podane powyżej, to takiego odgraniczenia od zera **nie** możemy uzyskać. Jakie tutaj układy dynamiczne będą odpowiadały za rozwiązanie problemu? Dowód Margulisa polegał na studiowaniu orbit grupy przekształceń zachowujących formę i klasyfikacji miar niezmienniczych, które możemy uzyskać na domknięciu orbit w tzw. przestrzeni jednorodnej odpowiedniej grupy macierzy o wyznaczniku 1.

Wybitne osiągnięcia tegorocznych laureatów nagrody Abela (i ich uczniów) pokazują, jak nowe, często zaskakujące, idee prowadzą do przełomowych odkryć stanowiących o postępie w nauce.





Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1654. Piotrek stoi w windzie na ostatnim piętrze $(n+1)$-poziomowego wieżowca, licząc z parterem. Postępuje zgodnie z następującą zasadą: jeśli znajduje się na k-tym piętrze, przy czym $1 \leqslant k \leqslant n$, to losuje, na który z k niższych poziomów $0, 1, \ldots, k-1$ zjeżdża, tzn. każdy z nich wybiera z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$.
(a) Jaki jest średnio numer piętra, z którego Piotrek zjedzie na parter?
(b) Ile średnio przejazdów windą wykona?
Rozwiązanie na str. 17

M 1655. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ jest równy 1 lub -1. Parę (k,l) nazwiemy *zerującą*, jeśli $1 \leqslant k < l \leqslant 2n$ oraz $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l = 0$. Wykazać, że liczba par zerujących jest nie większa od n^2.
Rozwiązanie na str. 18

M 1656. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1})$ jest równy 1 lub -1. Parę (k,l) nazwiemy *minusjedynkującą*, jeśli $1 \leqslant k < l \leqslant 2n-1$ oraz $b_k \cdot b_{k+1} \cdot \ldots \cdot b_l = -1$. Wykazać, że liczba par minusjedynkujących jest nie większa od n^2.
Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1011. Siła nośna F utrzymująca ptaka podczas lotu wynosi:

$$F = \frac{1}{2} c_L \rho_p S v^2,$$

gdzie ρ_p jest gęstością powietrza, v prędkością lotu (względem powietrza), S powierzchnią skrzydeł, a c_L współczynnikiem związanym z kształtem lecącego ptaka. Opierając się na tym, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do v^2, oszacuj, jak optymalna predkość poziomego lotu zależy od masy m ptaka.
Rozwiązanie na str. 13

F 1012. Mięśnie zbudowane są z bardzo wielu jednakowych, ułożonych równolegle, cienkich włókien. Podczas kurczenia każde włókno skraca się o odcinek proporcjonalny do jego długości i działa na punkt zaczepienia z taką samą siłą. Oszacuj, jak wysokość h skoku zwierzęcia zależy od jego masy m. Przez wysokość skoku rozumiemy tu zmianę wysokości jego środka masy podczas skoku „z miejsca”, tj. bez rozbiegu.
Rozwiązanie na str. 1