Trysekcja kąta w *Geometrii* Kartezjusza

Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Mikołaj SIERŻĘGA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

René Descartes (1596–1650)

Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi zagadnień i metod matematyki XVII wieku na przykładzie zadania trysekcji kąta i jego rozwiązania przez Kartezjusza. Przeplatają się tu metody geometryczne z algebraicznymi.

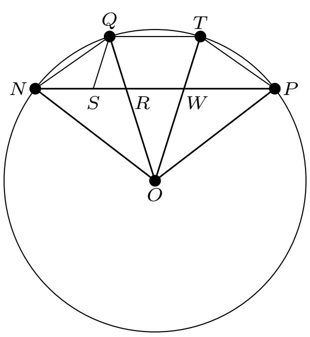
Zadanie. Podzielić dany kąt na trzy równe części.

Zadanie jest geometryczne i wymagana jest *konstrukcja* rozwiązania (odcinka). W *metodzie* zaproponowanej przez Kartezjusza w traktacie *Geometria*, rozwiązanie tego typu zadań przebiega w dwóch krokach: analiza (*resolutio*) i synteza (*compositio*), w następującym ujęciu.

Analiza to ułożenie równania algebraicznego. Składa się z dwóch punktów:

(a) Dla danego zadania geometrycznego zakładamy, że wymagana konstrukcja jest już dokonana i robimy odpowiadający zadaniu rysunek (rys. 1).

(b) Budujemy relacje między odcinkami danymi i odcinkiem szukanym i manipulujemy nimi, aż uzyskamy odpowiednie równanie algebraiczne.



Rys. 1

Synteza to tzw. *konstrukcja równania*, czyli geometryczna konstrukcja odcinka odpowiadającego rozwiązaniu równania algebraicznego (pierwiastki równania są reprezentowane jako miejsca przecięcia krzywych algebraicznych najniższego możliwego stopnia).

Zobaczmy, jak to wygląda w przypadku zadania trysekcji kąta. Punkt (a) to rysunek 1 na marginesie. Zawiera on już pewien pomysł, narysowanie odcinka QS równoległego do odcinka OT jest jego ważną częścią.

Połóżmy: $NO = 1$, $NP = q$, $NQ = z$. Chcemy znaleźć równanie na z w zależności od q, które mamy dane, gdy znamy kąt NOP, który mamy podzielić.

Zauważamy, że trójkąty ONQ, NQR i QRS są do siebie podobne (proszę sprawdzić), zatem

(1)
$$\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS},$$

skąd mamy $QR = z^2$, $RS = z^3$. Mamy dalej $NQ = QT = TP = z$ i $SW = QT = NR = WP = z$. Ponieważ $NR + RW + WP = NP = q$ i $RW = SW - RS = z - z^3$, otrzymujemy w końcu równanie algebraiczne, które Kartezjusz zapisuje w postaci

(2)
$$z^3 = 3z - q.$$

Jest oczywiste, że jeśli znamy z, czyli długość odcinka NQ, to konstrukcja trysekcji kąta jest zakończona za pomocą dwóch ruchów cyrklem. Zauważmy, że dla $0 < q \leqslant 2$ istnienie dodatniego pierwiastka powyższego równania wynika z interpretacji geometrycznej równania.

Konstrukcja odcinka z należy do części drugiej rozwiązania naszego zadania, czyli do **syntezy**.

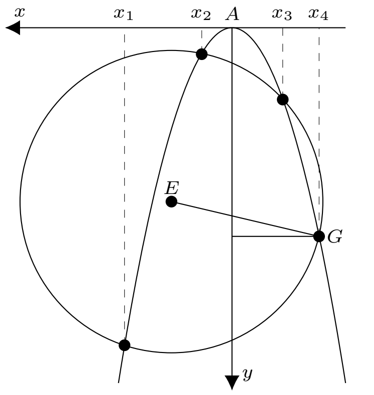
W *Geometrii* nasze zadanie rozważane jest jako szczególny przypadek równania 4. stopnia postaci

(3)
$$x^4 = Kx^2 + Lx + M$$

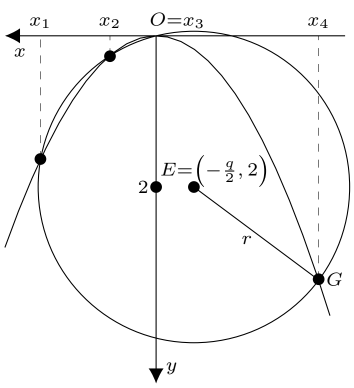
(do którego Kartezjusz sprowadza ogólne równanie 4. stopnia). Gdy $M = 0$, dzieląc powyższe równanie przez x, otrzymujemy równanie 3. stopnia postaci (2).

Rozwiązanie zadania M 1655. Ponieważ 1 oraz -1 są liczbami nieparzystymi, więc w każdej z par zerujących liczby k i l są różnej parzystości. To oznacza, że takich par jest co najwyżej tyle, co zbiorów $\{k, l\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ z jedną liczbą parzystą i jedną nieparzystą. Tych ostatnich jest dokładnie n^2.

Uwaga. Można zauważyć, że przyjmując np. $a_i = (-1)^i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2n$, uzyskujemy dokładnie n^2 par zerujących.



Rys. 2. Ten i następny rysunek to nieco uwspółcześnione wersje oryginalnych rysunków z *Geometrii*



Rys. 3

Rozwiązanie zadania M 1656.
Rozważmy ciąg $a_1 = 1$ oraz $a_{i+1} = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Zauważmy, że para (k, l) jest minusjedynkująca dokładnie wtedy, gdy $a_k = -a_{l+1}$, tzn. $\{a_k, a_{l+1}\} = \{-1, 1\}$. Jeśli w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ jest m wyrazów równych 1, to szukana liczba jest równa

$$m(2n-m) = n^2 - (n-m)^2,$$

a więc jest nie większa od n^2.

Uwaga. Można zauważyć, że przyjmując np. $b_i = -1$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, uzyskujemy dokładnie n^2 par minusjedynkujących.

Dokonamy konstrukcji pierwiastków równania (3), przy założeniu, że ma ono cztery pierwiastki rzeczywiste. Ujemne pierwiastki nazywa Kartezjusz *fałszywymi*, co nie wynika z tego, jakoby „bał się liczb ujemnych”, jak to czasem się przedstawia, ale z faktu, że długości odcinków są liczbami dodatnimi. Odrzuca on zatem rozwiązania absurdalne.

Konstrukcję rozwiązań równania (3) sprowadza Kartezjusz do konstrukcji geometrycznej punktów przecięcia paraboli $y = x^2$ z okręgiem, który należy znaleźć. Zauważmy, że jeśli w równaniu okręgu podstawimy $y = x^2$, to otrzymamy równanie czwartego stopnia.

Równanie okręgu o środku w punkcie (x_E, y_E) kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych i promieniu r ma postać

$$(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = r^2. \tag{4}$$

Sprowadzając to równanie do postaci bez nawiasów, podstawiając w nim $y = x^2$ i porównując współczynniki ze współczynnikami w równaniu (3), dostaniemy zależności

$$x_E = \frac{L}{2}, \quad y_E = \frac{K+1}{2}, \quad r^2 = M + \frac{L^2}{4} + \frac{(K+1)^2}{4}. \tag{5}$$

Można już teraz narysować okrąg, którego odcięte przecięć z parabolą $y = x^2$ są pierwiastkami równania (3) (rys. 2). Bardzo możliwe, że Kartezjusz do swojej konstrukcji wykorzystał powyższą metodę współczynników nieoznaczonych (Guicciardini, str. 53).

W przypadku równania (2), w zgodzie z powyższą redukcją równania 4. stopnia do równania 3. stopnia, początek układu współrzędnych i wierzchołek paraboli znajdują się na okręgu, środek okręgu znajduje się w punkcie $\left(-\frac{q}{2}, 2\right)$, promień okręgu $r = \sqrt{\frac{q^2}{4} + 4}$ i (dla $0 < q < 2$) mamy trzy rozwiązania równania (2), z których jedno jest „fałszywe”, a dwa są dodatnie (rys. 3). (W Księdze I *Geometrii* Kartezjusz przedstawia *arytmetykę odcinków*, czyli konstrukcje odcinków o długości $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$ itd., gdy mamy dane odcinki a i b. O paraboli zakłada się tu, że jest dana, wykreślona za pomocą przyrządu).

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem zadania geometrycznego trysekcji kąta NOP z rysunku 1 jest mniejszy z pierwiastków dodatnich. Zauważmy jednak, że punkty N i P wyznaczają nie jeden, a dwa dopełniające się kąty. Widzimy tutaj, jakie znaczenie ma drugi z dodatnich pierwiastków równania (2). Wyznacza on długość cięciwy stosowanej do trysekcji dopełnienia kąta NOP. W przypadku skrajnym, $q = 2$, mamy jeden pierwiastek dodatni $z = 1$. Wtedy styczna do wykresu funkcji z^3 pokrywa się z prostą $3z - 2$. Na koniec warto zauważyć, że ujemny pierwiastek, jakkolwiek geometrycznie absurdalny, jest ściśle powiązany z pozostałymi pierwiastkami, będąc, co do modułu, równy ich sumie. Jest to uniwersalna własność równań 3. stopnia z zerowym współczynnikiem przy wyrazie drugiego rzędu.

Zauważmy, że synteza w powyższym przykładzie nie jest prostą odwrotnością analizy, jak to bywa np. w zagadnieniach algebraicznych, gdzie rozumowanie opiera się na ciągu równań prowadzących od hipotezy do tezy, które można przeczytać w odwrotną stronę (ciąg równoważności $A \equiv B \equiv C \equiv \cdots \equiv J$). W swojej *konstrukcji równania* Kartezjusz użył krzywych stożkowych, dobrze znanych od starożytności.

Warto uzmysłowić sobie, że bardzo długo w matematyce dominował paradygmat mówiący o tym, że rozwiązanie zadania to konstrukcja geometryczna, a nie ułożenie równania i wykazanie, że rozwiązania istnieją (konstrukcja rozwiązania nie należy do dzisiejszego paradygmatu matematyki, co niewątpliwie jest jej słabością). Niektórzy autorzy tamtych czasów uważali analizę (resolutio) tylko za część pomocniczą, heurezę, która jest nieelegancka i którą można usunąć w ostatecznej wersji publikacji. Pewność dowodu daje konstrukcja. Także Archimedes chował często źródła swoich pomysłów analitycznych, przedstawiając tylko dowód geometryczny. Wielkim orędownikiem metod geometrycznych, jako dających matematyczną pewność, był Isaac Newton. Wystarczy zajrzeć do *Principiów*. Kontrowersje co do tego, jak ma wyglądać matematyka i w jakim języku należy ją wyrażać, ciągną sie do współczesności. Dominujący od około 100 lat paradygmat ujęć algebraicznych czy analitycznych w języku abstrakcyjnej symboliki literowej, redukujących geometrię do co najwyżej rysunku pomocniczego, spotyka się stale ze słuszną krytyką znakomitych matematyków i nauczycieli. Niestrudzonym adwokatem metod geometrycznych we współczesnej matematyce był na przykład Władimir Arnold. Tristan Needham z kolei porównuje obecną sytuację do absurdalnego świata muzyki, w którym można tworzyć jedynie partyturę utworu, ale jego wykonywanie jest niemile widziane czy wręcz zakazane. A przecież muzyka to słuchanie, a matematyka to widzenie. Najwyższą formą poznania jest widzenie intuicyjne, jasny i wyraźny obraz.

À propos **trysekcji klasycznej**. Bez wątpienia części Czytelników problem trysekcji kąta skojarzy się z klasycznym problemem jej niewykonalności. Faktycznie, w 1837 roku Pierre Wantzel, uzbrojony w przełomowe idee Évariste'a Galois, dowiódł, że taki podział jest w ogólności (tj. dla dowolnego kąta) niemożliwy do wykonania **za pomocą cyrkla i liniału**. Jak te fundamentalne fakty mają się do powyższego przepisu? Jak już wiemy, w swojej *Geometrii* Kartezjusz ułożył równanie

Konstruowalność za pomocą cyrkla i liniału zakłada skończoną sekwencję operacji typu:
(a) narysować prostą przechodzącą przez dwa punkty,
(b) narysować okrąg o zadanym środku i promieniu,
(c) znaleźć punkt przecięcia dwóch prostych, dwóch okręgów lub prostej i okręgu.

$$z^3 = 3z - q,$$

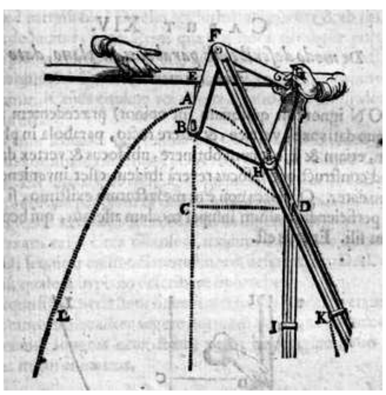
gdzie z jest odcinkiem, który należy zbudować, mając dane q, które zależy od kąta, który z kolei mamy podzielić na trzy części.

Zauważmy, że dla kąta $\alpha = 180°$ mamy $q = 2$ i pierwiastkiem naszego równania jest $z = 1$, co jest oczywiście równe NO, czyli równe promieniowi okręgu, na którym oparty jest kąt α. W tym przypadku trysekcja kąta pokrywa się z zadaniem wyznaczenia sześciokąta foremnego.

Dla kąta $\alpha = 60°$ mamy $q = 1$, ale w tym przypadku rozwiązanie równania

$$z^3 = 3z - 1 \tag{6}$$

nie jest konstruowalne za pomocą cyrkla i liniału. Łatwo się o tym przekonać, sprawdzając, że równanie to nie ma pierwiastków wymiernych (wystarczy podstawić $z = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi, niemającymi wspólnego dzielnika). Proste rozumowanie prowadzi do wniosku, że z powyższej postaci może być równe tylko 1 lub -1. Żadna z tych liczb nie jest rozwiązaniem równania (6). Skorzystaliśmy ze znanego twierdzenia o wielomianach trzeciego stopnia, które jest przystępnie opisane na przykład w książce Couranta i Robbinsa *Co to jest matematyka?*



Mechanizm rysujący parabolę

Ogólniej, poza pewnymi szczególnymi przypadkami, krokiem przepisu Kartezjusza, który jest niekonstrukcyjny w sensie klasycznym, jest znalezienie punktów przecięcia paraboli i okręgu.

Jeżeli jednak będziemy mniej radykalni i, podobnie jak matematycy XVII wieku, wyjdziemy poza liniał i cyrkiel, poprzez użycie narzędzi takich, jak na przykład ukazany na marginesie mechanizm Franza van Schootena (1615–1660), to okaże się, że procedura Kartezjusza pozwala rozwiązywać równania trzeciego stopnia bez wykonania jakiejkolwiek algebraicznej operacji.

Literatura:

W. I. Arnold, *O nauczaniu matematyki*, Wiadomości Matematyczne, **37**, Nr 01, str. 17–26, 2001.
N. Guicciardini, *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, MIT Press, 2009.
Kartezjusz, *Geometria*, TAiWPN Universitas Kraków, 2016.
T. Needham, *Visual Complex Analysis*, OUP (USA), 1999.
I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, Copernicus Center Press, 2013.
R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, 1988.
G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, 1964.