

# Nagrody Abela w roku 2020

Za co Hillel Furstenberg (Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie) oraz Gregory Margulis (Uniwersytet Yale w New Haven) otrzymali tegoroczną nagrodę?

\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Mariusz LEMAŃCZYK\*

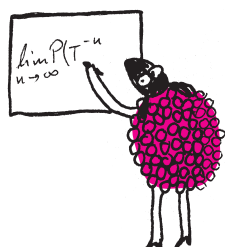
Badania naukowe tegorocznych laureatów Nagrody Abela koncentrują się na głębokich zastosowaniach teorii ergodycznej w różnych zagadnieniach dotyczących teorii liczb, geometrii, aproksymacji czy kombinatoryki. Teoria ergodyczna, która jest częścią szerszej teorii układów dynamicznych, wyrosła około 100 lat temu z zagadnień czysto fizycznych. W teorii tej zajmujemy się przestrzeniami probabilistycznymi  $(\Omega, \mathbb{P})$ , gdzie  $\mathbb{P}(A)$  jest prawdopodobieństwem zdarzenia  $A \subset \Omega$ . Zazwyczaj  $\mathbb{P}$  jest określone tylko dla pewnej rodziny podzbiorów zbioru  $\Omega$ , zwanych *zbiorami mierzalnymi*. Na  $\Omega$  mamy dodatkowo określone przekształcenie  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  zachowujące prawdopodobieństwo  $\mathbb{P}$ , tzn.  $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$  dla podzbiorów mierzalnych  $A \subset \Omega$ . Przekształcenie  $T$  mówi nam, jak przebiega ewolucja punktów  $\omega \in \Omega$  w czasie:

$$\omega \mapsto T\omega \mapsto T^2\omega \mapsto \dots,$$

zachowywanie prawdopodobieństwa zaś to pewne „prawo fizyczne” – ewolucja w naszym układzie dynamicznym  $(\Omega, \mathbb{P}, T)$  odbywa się z zachowaniem „objętości”, tzn. z zachowaniem prawdopodobieństwa  $\mathbb{P}$ . Popatrzmy na bardzo prosty przykład układu dynamicznego. Niech  $\Omega$  będzie okręgiem jednostkowym, tzn. niech  $\Omega = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ ,  $\mathbb{P}$  zaś prawdopodobieństwem wyznaczonym przez żądanie, aby dla każdego łuku  $A \subset \mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2\pi}|A|$  (gdzie przez  $|A|$  oznaczyliśmy długość łuku) i niech  $Tz = e^{2\pi i\alpha}z$ , gdzie  $\alpha \in [0, 1)$  ( $T$  jest obrotem o kąt  $2\pi\alpha$ ). Ten przykład jest charakterystyczny dla sytuacji, w której mamy dodatkową strukturę przestrzeni  $\Omega$ , tzn. mamy zadane „dobre” przekształcenie  $T$  „dobrej” przestrzeni  $\Omega$  i próbujemy opisać **wszystkie** możliwe prawdopodobieństwa niezmiennicze (w przykładzie powyżej można pokazać, że wskazane przez nas prawdopodobieństwo jest **jedynym** prawdopodobieństwem niezmienniczym, gdy  $\alpha$  jest liczbą niewymierną). Natomiast sama teoria ergodyczna bada rozmieszczenie („geometrię”) *orbit* punktów w przestrzeni, tzn. zbiorów  $\{T^n\omega : n \geq 0\}$ , interesuje się własnościami „mieszającymi” (co jest wstępem do badania chaosu w układzie). Możemy np. pytać, czy  $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) = \Omega$ , a dokładniej – pytać, czy z prawdopodobieństwem 1 orbita punktu  $\omega \in \Omega$  trafi do ustalonego zbioru  $A$ , takiego że  $\mathbb{P}(A) > 0$  (mówimy wtedy, że  $T$  jest *przekształceniem ergodycznym*). W powyższym przykładzie przekształcenie  $T$  jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha$  jest liczbą niewymierną. Możemy sprawdzać warunek mieszania dla podzbiorów mierzalnych  $A, B \subset \Omega$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^{-n}(A) \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

(a więc intuicyjnie zbiór  $B$  po pewnym czasie rozmazuje się po całej przestrzeni, przy czym jest on w każdym zbiorze  $A$  proporcjonalnie do swojej miary). Ergodyczność i mieszanie to przykłady własności, które dla pewnych układów zachodzą, a dla innych nie zachodzą. Ale są też własności (dodajmy nieoczywiste), które zachodzą w **każdym** układzie dynamicznym. Dla przykładu w każdym układzie dynamicznym  $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ , dla dowolnego zbioru mierzalnego  $A$ , prawie każdy punkt  $\omega \in A$  powróci do zbioru  $A$  nieskończenie wiele razy (ten fakt, zwany twierdzeniem o powracaniu, został odkryty przez Poincarégo jeszcze w XIX wieku). Znacznie głębsze jest słynne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa (sprzed 90 lat), które mówi nam, że typowe punkty (tzn. punkty z pewnego zbioru o prawdopodobieństwie 1) „chodzą” po przestrzeni regularnie w tym sensie, że jeśli weźmiemy jakikolwiek „pomiar” na naszej przestrzeni (wyrażany przez funkcję  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , powiedzmy „mierzalną” i ograniczoną), to średnie  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n\omega)$  mają granicę, gdy  $N \rightarrow \infty$ . A gdy układ  $(\Omega, \mathbb{P}, T)$  jest dodatkowo ergodyczny, to granica ta będzie równa „średniej” funkcji  $f$  po całej przestrzeni (tzn. otrzymamy całkę funkcji  $f$  względem prawdopodobieństwa  $\mathbb{P}$ ).



## Rozwiązanie zadania F 1012.

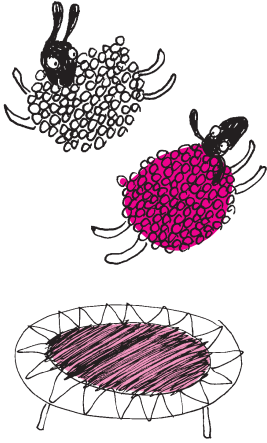
Jeżeli mięśnie zbudowane są z ułożonych równolegle jednakowych włókien, z których każde podczas skurczu działa z tą samą siłą, to siła  $F$ , z jaką działa mięsień, jest proporcjonalna do pola  $S$  jego przekroju poprzecznego. Skrócenie  $d$  mięśnia jest proporcjonalne do jego długości  $l$ . Energia potencjalna „skoczka” o masie  $m$  po osiągnięciu maksymalnej wysokości  $h$  jest równa pracy wykonanej przez kurczące się mięśnie:  $mgh = Fd$ , a więc

$$h = \frac{Fd}{mg}.$$

Występujące we wzorze wielkości skalują się z rozmiarem  $L$  zwierzęcia w następujący sposób:  $m \propto L^3$ ,  $F \propto S \propto L^2$  i  $d \propto L$ . Otrzymujemy:

$$h \propto \frac{L^2 \cdot L}{L^3} = L^0.$$

Nasze rozumowanie prowadzi do wniosku, że wysokość skoku nie zależy od rozmiarów zwierzęcia i tym samym także od jego masy. Dane (Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994): pchła:  $h = 20$  cm,  $m = 0,49$  mg; szarańcza  $h = 59$  cm,  $m = 3$  g; człowiek  $h = 60$  cm,  $m = 70$  kg.



Powyżej mówiliśmy o sytuacji, w której mamy do czynienia z jednym przekształceniem  $T$  (choć właściwie rozpatrujemy zbiór  $\{T^n; n \in \mathbb{N}\}$ ), ale można sobie wyobrazić, że na  $\Omega$  działa rodzina przekształceń  $\{T_g; g \in G\}$ , gdzie  $G$  ma jakąś dodatkową strukturę. Dla przykładu możemy myśleć, że  $G$  jest pewną rodziną macierzy o wyznaczniku różnym od zera, zamkniętą ze względu na mnożenie i branie elementu odwrotnego – jest to więc szczególny przypadek struktury, którą w matematyce nazywa się *grupą*. Wtedy rodzina  $\{T_g; g \in G\}$  jest pewną *reprezentacją* grupy  $G$  w zbiorze układów dynamicznych przestrzeni  $(\Omega, \mathbb{P})$  (zakładamy zachowywanie struktur, tzn. zakładamy, że  $T_{gh} = T_g \circ T_h$  dla  $g, h \in G$ ). I znowu możemy zadawać różne ciekawe pytania ergodyczne, których próbkę widzieliśmy powyżej, gdy „czas”  $G$  był równy  $\mathbb{N}$ . Czy taka abstrakcyjna teoria, która przecież musiała wypracować trudne metody, aby dowodzić w miarę ogólnych twierdzeń, może mieć cokolwiek wspólnego z bardziej „przyziemnymi” problemami matematyki? Okazuje się, że tak. Geniusz Hillela Furstenberga polegał m.in. na tym, że zaproponował on już w latach 70. XX wieku dalsze rozwijanie teorii ergodycznej w duchu twierdzeń dotyczących wielokrotnego powracania czy też zbieżności niekonwencjonalnych średnich ergodycznych. Widział on, że – może nieco wbrew swoim „fizycznym” korzeniom – twierdzenia teorii ergodycznej dają się interpretować jako twierdzenia o kombinatorycznych własnościach podzbiorów zbioru „czasów”, w szczególności podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Furstenberg udowodnił na przykład, że dla dowolnego układu dynamicznego  $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ , dowolnej liczby naturalnej  $\ell \geq 1$  i dowolnego zbioru  $A \subset \Omega$ ,  $\mathbb{P}(A) > 0$  mamy

$$(*) \quad \mathbb{P}(A \cap T^{-r}(A) \cap T^{-2r}(A) \cap \dots \cap T^{-\ell r}(A)) > 0$$

dla **nieskończenie wielu**  $r \geq 1$ . Udowodnił on również, że powyższe twierdzenie jest równoważne pewnemu twierdzeniu opisującemu kombinatoryczne własności „dużych” podzbiorów liczb naturalnych. Zanim jednak przedstawimy jego pełne sformułowanie, potrzebujemy następującej definicji:

**Definicja** (górnjej dodatniej gęstości Banacha). Powiemy, że zbiór  $F \subset \mathbb{N}$  ma własność GGBD, jeśli istnieje stała  $\kappa > 0$  oraz dwa ciągi liczbowe  $a_N$  i  $b_N$ , które mają (dla każdego naturalnego  $N$ ) następujące własności:  $a_N \geq 1$ ,  $b_N > N$  i  $\frac{1}{b_N} |F \cap [a_N, a_N + b_N]| \geq \kappa$ .

A oto i samo twierdzenie:

**Twierdzenie.** *Jeśli  $F \subset \mathbb{N}$  ma własność GGBD, to zbiór  $F$  zawiera postępy arytmetyczne dowolnej długości. Tzn. dla dowolnej liczby naturalnej  $\ell \geq 1$  istnieje takie  $r \geq 1$  oraz  $n \geq 1$ , że  $n, n+r, n+2r, \dots, n+\ell r \in F$ .*

W pewnym sensie widać, że zbiór  $F$  nie może być „dowolny”, jakaś struktura całego zbioru liczb naturalnych w nim pozostała. Można spostrzec, że gdy  $\mathbb{N} = F_1 \cup \dots \cup F_s$ , gdzie zbiory  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, s$  są parami rozłączne, to któryś z tych zbiorów musi mieć własność GGBD, a więc w którymś ze zbiorów  $F_j$  musiała „przeżyć” struktura zbioru  $\mathbb{N}$ . Może jeszcze tytułem ciekawostki dodajmy, że aby udowodnić powyższe twierdzenie, udowodnione wcześniej przez matematyka węgierskiego Endre Szemerédiego (laureata Nagrody Abela w roku 2012) metodami czysto kombinatorycznymi, w (\*) potrzebujemy „jedynie”, żeby przekroje  $A \cap T^{-r}(A) \cap \dots \cap T^{-\ell r}(A)$  były niepuste. Tak to już jednak bywa, że aby wykazać niepustość zbioru, tzn. istnienie „dobrej” konfiguracji bez wskazywania **konkretnej** konfiguracji, trzeba rozwinąć ogromną teorię wskazującą na **powód** niepustości.

Gdy chcemy dowodzić bardziej specyficznych własności teoriolicebowych czy też kombinatorycznych, często możemy zawęzić klasę układów dynamicznych, których pewne własności ergodyczne (o ile uda nam się je udowodnić) mają ciekawe i może bardziej intuicyjne implikacje. Niezwykle owocną rolę odgrywają tu tzw. układy dynamiczne pochodzenia algebraicznego, które są określone na pewnych strukturach ilorazowych grup macierzowych, a reprezentacja grupy  $G$  pochodzi od „obrotów” wyznaczonych przez mnożenie macierzy (obroty niewymierne są tu bardzo prostym, bo jednowymiarowym, przykładem takich działań). Zilustrujmy to podejście słynną hipotezą Oppenheima o formach

kwadratowych sprzed 90 lat, której prawdziwość udowodnił Gregory Margulis (laureat medalu Fieldsa z 1978 roku). Tytułem wprowadzenia popatrzymy na przypadek form zależących od dwóch zmiennych  $x, y \in \mathbb{R}$ . Otóż można spostrzec, że wzór  $Q(x, y) = x^2 - (\alpha + 1)y^2$ , gdzie  $\alpha$  jest złotą proporcją, tzn.  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  definiuje funkcję  $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o następujących własnościach: (i)  $Q$  jest formą kwadratową, (ii)  $Q$  przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne ( $Q$  nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona), a ponadto (iii)  $Q$  nie jest proporcjonalna do formy o współczynnikach wymiernych. Jeśli teraz  $x, y \neq 0$  są liczbami całkowitymi, to (wobec  $\alpha^2 = \alpha + 1$ )

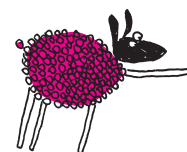
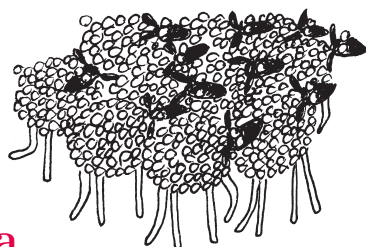
$$|Q(x, y)| = y^2 \left| \frac{x}{y} + \alpha \right| \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \geq \alpha y^2 \left| \frac{x}{y} - \alpha \right| \geq \alpha C > 0,$$

gdyż złota liczba jest źle aproksymowalna liczbami wymiernymi:  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq C/q^2$  dla pewnej stałej  $C > 0$  i **dowolnych**  $p, q \in \mathbb{N}$ ! Zatem wartości formy  $Q$  przyjmowane na argumentach całkowitych ( $(x, y) \neq (0, 0)$ ) są odgraniczone od zera. Słynna hipoteza Oppenheima stanowiła, że jeśli użyjemy więcej zmiennych niż dwie, np. rozpatrując  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające własności (i)–(iii) podane powyżej, to takiego odgraniczenia od zera **nie** możemy uzyskać. Jakie tutaj układy dynamiczne będą odpowiadały za rozwiązanie problemu? Dowód Margulisa polegał na studiowaniu orbit grupy przekształceń zachowujących formę i klasyfikacji miar niezmienniczych, które możemy uzyskać na domknięciu orbit w tzw. przestrzeni jednorodnej odpowiedniej grupy macierzy o wyznaczniku 1.

Wybitne osiągnięcia tegorocznych laureatów nagrody Abela (i ich uczniów) pokazują, jak nowe, często zaskakujące, idee prowadzą do przełomowych odkryć stanowiących o postępie w nauce.



## Zadania



Przygotował Łukasz BOŻYK

**M 1654.** Piotrek stoi w windzie na ostatnim piętrze  $(n + 1)$ -poziomowego wieżowca, licząc z parterem. Postępuje zgodnie z następującą zasadą: jeśli znajduje się na  $k$ -tym piętrze, przy czym  $1 \leq k \leq n$ , to losuje, na który z  $k$  niższych poziomów  $0, 1, \dots, k - 1$  zjeżdża, tzn. każdy z nich wybiera z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{k}$ .

(a) Jaki jest średnio numer piętra, z którego Piotrek zjedzie na parter?

(b) Ile średnio przejazdów windą wykona?

Rozwiązanie na str. 17

**M 1655.** Niech  $n \geq 1$  będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu  $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$  jest równy 1 lub  $-1$ . Parę  $(k, l)$  nazwiemy *zerującą*, jeśli  $1 \leq k < l \leq 2n$  oraz  $a_k + a_{k+1} + \dots + a_l = 0$ . Wykazać, że liczba par zerujących jest nie większa od  $n^2$ .

Rozwiązanie na str. 18

**M 1656.** Niech  $n \geq 1$  będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu  $(b_1, b_2, \dots, b_{2n-1})$  jest równy 1 lub  $-1$ . Parę  $(k, l)$  nazwiemy *minusjedyńkującą*, jeśli  $1 \leq k < l \leq 2n - 1$  oraz  $b_k \cdot b_{k+1} \cdot \dots \cdot b_l = -1$ . Wykazać, że liczba par minusjedyńkujących jest nie większa od  $n^2$ .

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1011.** Siła nośna  $F$  utrzymująca ptaka podczas lotu wynosi:

$$F = \frac{1}{2} c_L \rho_p S v^2,$$

gdzie  $\rho_p$  jest gęstością powietrza,  $v$  prędkością lotu (względem powietrza),  $S$  powierzchnią skrzydeł, a  $c_L$  współczynnikiem związanym z kształtem lecącego ptaka. Opierając się na tym, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do  $v^2$ , oszacuj, jak optymalna predkość poziomego lotu zależy od masy  $m$  ptaka.

Rozwiązanie na str. 13

**F 1012.** Mięśnie zbudowane są z bardzo wielu jednakowych, ułożonych równolegle, cienkich włókien. Podczas kurczenia każde włókno skraca się o odcinek proporcjonalny do jego długości i działa na punkt zaczepienia z taką samą siłą. Oszacuj, jak wysokość  $h$  skoku zwierzęcia zależy od jego masy  $m$ . Przez wysokość skoku rozumiemy tu zmianę wysokości jego środka masy podczas skoku „z miejsca”, tj. bez rozbiegu.

Rozwiązanie na str. 1