Wielomiany, nierówności i Newton

Łukasz RAJKOWSKI

Wielomian jaki jest, każdy widzi. I każdy, kto widzi, wie również, że wielomiany miewają pierwiastki rzeczywiste (czyli miejsca zerowe), ale nie zawsze. I tak wielomian $x^2 - 5x + 6$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste ($x_1 = 2$ i $x_2 = 3$), ale wielomian $x^2 - 2x + 5$ nie ma ani jednego. Twierdzenie Bézouta orzeka, że jeśli x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to możemy zapisać $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ dla pewnego wielomianu $Q(x)$. Jeśli dla liczby naturalnej k zachodzi $P(x) = (x - x_0)^k R(x)$ dla pewnego wielomianu $R(x)$ oraz $R(x_0) \neq 0$, to mówimy, że x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P. W tej sytuacji wielomian $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$ ma jeden pierwiastek dwukrotny i jeden pierwiastek jednokrotny. Z twierdzenia Bézouta można wywnioskować, że wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (uwzględniając krotności). Jeśli ma ich dokładnie n, będziemy go nazywać *najedzonym.* Nie jest to formalny, matematyczny termin, jednak wydaje się dużo bardziej wdzięczny niż dokładne tłumaczenie angielskiego terminu *real rooted.* Rzecz jasna, wielomiany, które nie są najedzone, będziemy nazywać *głodnymi.*

Czy można rozpoznać najedzony (lub głodny) wielomian „na pierwszy rzut oka”? Zacznijmy od wielomianów stopnia pierwszego – oczywiście każdy z nich jest najedzony. Wielomiany stopnia drugiego mogą być głodne (tak jak wspomniany wcześniej wielomian $x^2 - 2x + 5$), jednak po latach szkolnego treningu powinniśmy je bez trudu rozpoznać. Wszak jeśli trójmian kwadratowy $a_2x^2 + a_1x + a_0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste (czyli jest najedzony), to jego wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$ jest nieujemny, czyli $a_1^2 \geqslant 4a_0a_2$. Widać zatem, że poczucie sytości u wielomianu może być związane z pewnymi nierównościami dotyczącymi jego współczynników. Celem artykułu jest przedstawienie uogólnienia wspomnianej przed chwilą własności trójmianu kwadratowego na wielomiany większych stopni. Wyraża je następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Załóżmy, że wielomian* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ *jest najedzony, i niech* $A_k = a_k/\binom{n}{k}$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, n$. *Wówczas*

$$(*) \qquad A_{k-1}A_{k+1} \leqslant A_k^2,$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, potrzebujemy najpierw przyjrzeć się dokładniej najedzonym wielomianom. Dla wygody, w dalszej części artykułu przyjmijmy oznaczenia takie jak w treści twierdzenia. Istotne będą dla nas pewne dwie operacje, które możemy przeprowadzić na najedzonym wielomianie, tak aby nie zgłodniał. Pierwsza z nich to „lustrzane odbicie”:

Fakt 1. *Załóżmy, że wielomian* $P(x)$ *jest najedzony. Wówczas wielomian* $\reflectbox{$P$}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *również jest najedzony.*

Żeby przekonać się o słuszności faktu 1, musimy przyjrzeć się, czy i jak zmieniają się pierwiastki i ich krotności, gdy stosujemy „lustrzane odbicie”. Zwróćmy uwagę, że skoro $a_n \neq 0$, to 0 nie może być pierwiastkiem wielomianu $\reflectbox{$P$}(x)$ (jego wyraz wolny jest niezerowy). Załóżmy, że 0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu P (jeśli 0 nie jest pierwiastkiem $P(x)$, przyjmijmy $k = 0$). Wówczas $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ i $a_k \neq 0$ (a jeśli $k = 0$, nie bierzemy pod uwagę pierwszego ciągu równości). W tej sytuacji wielomian $\reflectbox{$P$}(x)$ ma stopień $n - k$. Załóżmy teraz, że $x_0 \neq 0$ jest l-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, i niech $P(x) = (x - x_0)^l Q(x)$. Nietrudno uzasadnić, że dla dowolnego $x \neq 0$ zachodzi $\reflectbox{$P$}(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$. W tej sytuacji proste przekształcenia algebraiczne prowadzą do wniosku, że

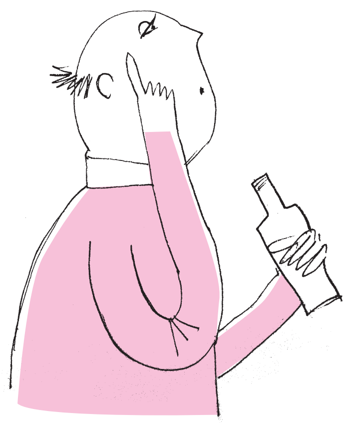
$$\reflectbox{P}(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} - x_0\right)^l Q\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= (-x_0)^{-l}\left(x - \frac{1}{x_0}\right)^l \reflectbox{Q}(x),$$

gdzie $\reflectbox{$Q$}(x)$ jest „lustrzanym odbiciem” wielomianu $Q(x)$. Ponieważ $\reflectbox{$Q$}(\frac{1}{x_0}) = x_0^{-n}Q(x_0) \neq 0$, powyższa równość dowodzi, że $\frac{1}{x_0}$ jest l-krotnym pierwiastkiem wielomianu $\reflectbox{$P$}(x)$. Przedstawione rozważania dowodzą, że wielomian $\reflectbox{$P$}(x)$ jest najedzony, gdyż krotności odwrotności niezerowych pierwiastków wielomianu $P(x)$ sumują się do $n - k$, czyli stopnia wielomianu $\reflectbox{$P$}(x)$.

Druga operacja niepowodująca głodu, która będzie nam potrzebna, to różniczkowanie wielomianu. Czytelnikom, którzy nie znają różniczkowania, polecamy przeczytać krótką notkę na stronie 5.

Fakt 2. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ jest najedzony. Wówczas wielomian $P'(x)$ również jest najedzony.

Powyższy fakt wynika stąd, że różniczkowanie obniża krotność każdego pierwiastka o 1, w związku z czym wyjściowy wielomian „traci” przy różniczkowaniu K pierwiastków, gdzie K jest liczbą różnych jego pierwiastków. Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Rolle'a, między dwoma sąsiednimi (na osi liczb rzeczywistych) pierwiastkami wielomianu $P(x)$ istnieje pierwiastek wielomianu $P'(x)$, i w ten sposób wielomian $P'(x)$ „zyskuje” $K - 1$ nowych pierwiastków. Uwzględniając te dwie obserwacje, potrafimy zlokalizować $n - 1$ (gdzie n to stopień wielomianu $P(x)$) pierwiastków $P'(x)$, licząc krotności. Ponieważ stopień $P'(x)$ również wynosi $n - 1$, jest on najedzony.



Uzbrojeni w fakty 1 i 2 możemy przejść do dowodu twierdzenia. Załóżmy, że wielomian $P(x)$ jest najedzony, i wybierzmy dowolnie $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ponieważ różniczkowanie nie sprawia, że wielomian staje się głodny, to stosując tę operację $(k-1)$ razy na wielomianie $P(x)$, otrzymamy wielomian

$$R(x) = \frac{n!}{(n-k+1)!}a_n x^{n-k+1} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!}a_{n-1}x^{n-k} + \ldots + \frac{(k-1)!}{0!}a_{k-1}.$$

Ponieważ wielomian $R(x)$ jest najedzony, to jego lustrzane odbicie

$$\text{Я}(x) = \frac{(k-1)!}{0!}a_{k-1}x^{n-k+1} + \frac{k!}{1!}a_k x^{n-k} + \ldots + \frac{n!}{(n-k+1)!}a_n$$

także jest najedzone. W tej sytuacji różniczkując $(n-k-1)$ razy wielomian $\text{Я}(x)$, dostaniemy najedzony wielomian

$$\begin{aligned}\text{Я}^{(k-1)}(x) &= \frac{(n-k+1)!}{2!}\frac{(k-1)!}{0!}a_{k-1}x^2 + \frac{(n-k)!}{1!}\frac{k!}{1!}a_k x + \\ &+ \frac{(n-k-1)!}{0!}\frac{(k+1)!}{2!}a_{k+1} = \\ &= \frac{1}{2}n! \cdot (A_{k-1}x^2 - 2A_k x + A_{k+1}).\end{aligned}$$

Oznacza to, że wielomian $A_{k-1}x^2 - 2A_k x + A_{k+1}$ również jest najedzony, jednak zgodnie z informacjami przedstawionymi we wstępie do tego artykułu oznacza to, że $(2A_k)^2 \geqslant 4A_{k-1}A_{k+1}$, co jest równoważne $(*)$ i kończy dowód.

Nierówności $(*)$ noszą nazwę *nierówności Newtona*, gdyż Isaac Newton w swoim dziele *Arithmetica Universalis* (1707) stwierdził (bez dowodu), że liczba rzeczywistych pierwiastków wielomianu $P(x)$ jest nie mniejsza od stopnia wielomianu pomniejszonego o liczbę zmian znaku w ciągu

$$A_0^2, \quad A_1^2 - A_0A_2, \quad A_2^2 - A_1A_3, \quad \ldots, \quad A_{n-1}^2 - A_{n-2}A_n, \quad A_n^2.$$

Nietrudno przekonać się, że przedstawiona hipoteza jest silniejsza od naszego twierdzenia, jednak na swój dowód czekała ponad 100 lat. Udowodnił ją James Sylvester w roku 1865.

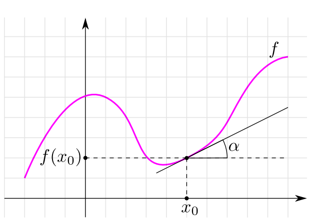
Nasze twierdzenie nie musiało być aż tak cierpliwe, gdyż wykazał je w roku 1729 uczeń Newtona, Colin Maclaurin, próbując uzasadnić hipotezę postawioną przez nauczyciela. Zauważył on również, że jeśli wielomian $P(x)$ jest najedzony, $a_n = 1$ i liczby A_i są dodatnie, to zachodzi

$$\sqrt[n]{A_0} \leqslant \sqrt[n-1]{A_1} \leqslant \ldots \leqslant \sqrt{A_{n-2}} \leqslant A_{n-1}.$$

Są to tak zwane *nierówności Maclaurina*. Ich uzasadnienie jest następujące: przy poczynionych założeniach dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots, n-1$ mamy

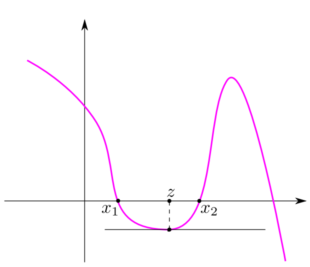
$$(A_nA_{n-2})(A_{n-1}A_{n-3})^2 \ldots (A_{n-k+1}A_{n-k-1})^k \leqslant A_{n-1}^2 A_{n-2}^4 \ldots A_{n-k}^{2k},$$

co po skróceniu przez $A_{n-1}^2A_{n-2}^4 \ldots A_{n-k+1}^{2k-2}$ daje $A_{n-k-1}^k \leqslant A_{n-k}^{k+1}$ i ostatecznie $\sqrt[k+1]{A_{n-k-1}} \leqslant \sqrt[k]{A_{n-k}}$.



Na tym rysunku $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

O różniczkowaniu dla nieróżniczkujących. Ze względu na młodszych Czytelników *Delty* poniżej prezentujemy krótką „bajkę" o tym, czym to różniczkowanie jest. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją. Jeśli istnieje prosta styczna do wykresu funkcji f w pewnym punkcie $(x_0, f(x_0))$, to tangens kąta nachylenia tej stycznej nazwiemy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i będziemy oznaczać przez $f'(x_0)$. W szczególności, jeśli $f'(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$, to styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest pozioma. Łatwo w związku z tym uwierzyć, że jeśli dla pewnych $x_1 < x_2$ mamy $f(x_1) = f(x_2) = 0$ oraz w każdym punkcie przedziału $[x_1, x_2]$ istnieje styczna do wykresu funkcji f, to w pewnym punkcie ta styczna jest pozioma, czyli istnieje $z \in (x_1, x_2)$ takie, że $f'(z) = 0$. Mówi o tym *twierdzenie Rolle'a*.



Ilustracja twierdzenia Rolle'a

Okazuje się, że pochodna wielomianu $P(x)$ wyraża się wzorem $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$, czego nie będziemy tutaj dowodzić. Jeśli $Q(x)$ i $R(x)$ są wielomianami, można algebraicznie udowodnić następującą równość, co polecamy jako ćwiczenie:

$$\big(R(x)Q(x)\big)' = R'(x)Q(x) + R(x)Q'(x).$$

Równość ta jest słuszna nie tylko dla wielomianów, ale w ogólnym przypadku dowód już nie jest algebraiczny. Kolejnym ćwiczeniem jest uzasadnienie, jak z powyższej równości wynika fakt, że jeśli a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to jest $(k-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P'(x)$.

Przypomnijmy teraz wzory Viète'a: jeśli $-x_1, \ldots, -x_n$ są pierwiastkami wielomianu $P(x)$ i $a_n = 1$, to

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad a_{n-2} = \sum_{i<j}^{n} x_i x_j, \quad \ldots, \quad a_0 = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

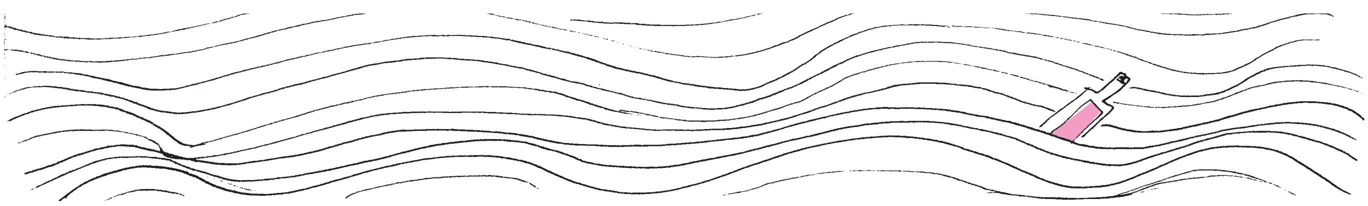
Jeśli wszystkie liczby x_i są dodatnie, to spełnione są założenia dla nierówności Maclaurina. Zwróćmy uwagę, że wówczas

$$A_0 = x_1 x_2 \ldots x_n \text{ oraz } A_{n-1} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

W tej sytuacji nierówność Maclaurina stanowi uogólnienie dobrze znanej nierówności między średnią geometryczną a arytmetyczną. Warto zwrócić uwagę, że popularny dowód tej nierówności poprzez zastosowanie indukcji wstecznej pochodzi od matematyka Augustina Cauchy'ego i został opublikowany dopiero w 1827 roku. Czytelnikom, którzy nie są zaznajomieni z tym pięknym rozumowaniem, polecamy artykuł *Indukcja wsteczna* z Δ^2_{11}.

O *innej, dłuższej historii* Zainteresowany Czytelnik może poczytać w artykule *A new look at Newton's inequalities* autorstwa Constantina Niculescu, z którego korzystałem, pisząc niniejszy tekst. Inspirację zaczerpnąłem z cyklu wykładów Nikhila Srivastavy wygłoszonych na Uniwersytecie Warszawskim pod tytułem *Geometry of Polynomials*. Nagrania z tych wykładów są udostępnione w serwisie YouTube – gorąco polecam skorzystać.

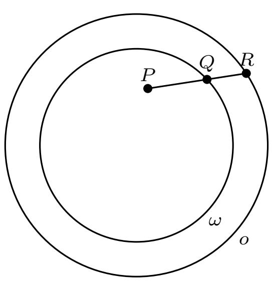
Na zakończenie warto zaznaczyć, że przedstawione twierdzenie *nie charakteryzuje* najedzonych wielomianów. Dla przykładu, wielomian $4x^3 + 4x^2 - 3x - 5 = (x-1)\big(4(x+1)^2 + 1\big)$ nie jest najedzony, ale spełnia opisane przez $(*)$ nierówności. Czy w ogóle istnieją takie charakteryzacje? I tak i nie, ale to już inna, dłuższa historia.



Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1651. Zaprojektować dwie różne sześcienne kości do gry, dające te same prawdopodobieństwa wyrzucenia poszczególnych sum oczek co dwie kości standardowe. Na każdej ścianie nowej pary kości ma znaleźć się dodatnia liczba oczek.
Rozwiązanie na str. 11



M 1652. Okrąg ω leży wewnątrz okręgu o i współdzieli z nim środek. W kole ograniczonym przez ω znajduje się punkt P. Znaleźć taki punkt R na okręgu o, by długość odcinka QR, gdzie Q jest punktem przecięcia okręgu ω z odcinkiem PR, była jak największa.
Rozwiązanie na str. 15

M 1653. Jaś wymyślił pewien wielomian P o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Małgosia może pytać Jasia o wartość $P(a)$ dla wybranego przez nią całkowitego argumentu a. Ile pytań potrzebuje Małgosia, aby wyznaczyć wielomian P?
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1009. Jak wykazują badania, czas τ skutecznej reakcji kierowcy na nagłe zdarzenie to około 2 s. (a) Jaką bezpieczną odległość s_0 od jadącego przed nim pojazdu powinien zachować kierowca, jeśli oba pojazdy jadą z tą samą prędkością v? (b) Jaki odcinek drogi powinien widzieć kierowca jadący z prędkością v, żeby uniknąć zderzenia z nieruchomą przeszkodą? Przyspieszenie ziemskie wynosi g, współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi f.
Rozwiązanie na str. 14

F 1010. Bardzo daleko od Ziemi meteoroid porusza się z prędkością v_0 wzdłuż prostej mijającej Ziemię w odległości d od jej środka. Jaka będzie najmniejsza odległość D, na jaką meteoroid zbliży się do środka Ziemi? Przyspieszenie ziemskie wynosi g, promień Ziemi R.
Rozwiązanie na str. 13