Twierdzenie Lorda Rayleigha

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Lord Rayleigh, właściwie John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842–1919), laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w 1904 r. (badanie gęstości gazów i odkrycie, wspólnie z Sir W. Ramsayem, argonu).

Własność opisaną w twierdzeniu Lorda Rayleigha odkrył ponownie w 1926 roku kanadyjski matematyk Samuel Beatty (1881–1970), *Amer. Math. Monthly* 33 (1926), no 3, Problem 3173. Rozwiązanie: *Monthly* 34 (1927), str. 159.

Brytyjski fizyk Lord Rayleigh w 1877 roku w książce *The Theory of Sound* (vol. I, str. 123) opisał prawidłowość, którą można wyrazić następująco:

Twierdzenie 1. *Niech α i β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi takimi, że $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Niech $[x]$, gdzie $x\in\mathbb{R}$, oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Wówczas dla zbiorów*

$$A=\{[\alpha n]: n=1,2,\ldots\},\quad B=\{[\beta n]: n=1,2,\ldots\}$$

mamy: (i) $A\cap B=\emptyset$ *oraz* (ii) $A\cup B=\mathbb{N}$.

Ciągi liczb naturalnych, które spełniają własności (i) oraz (ii), nazywamy *komplementarnymi.*

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny. Przede wszystkim zauważmy, że jeśli α i β są liczbami niewymiernymi, to żadna z liczb postaci αn, βn (gdzie $n\in\mathbb{N}$) nie jest liczbą naturalną. Ponadto warunek $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ gwarantuje, że $\alpha>1$ i $\beta>1$.

Załóżmy, że istnieją liczby $m,n\in\mathbb{N}$ takie, że $[\alpha m]=[\beta n]=p\in\mathbb{N}$. Wtedy

$$p<\alpha m<p+1 \quad\text{i}\quad p<\beta n<p+1.$$

Stąd

$$\frac{m}{p+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{m}{p} \quad\text{i}\quad \frac{n}{p+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{n}{p}.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy nierówność

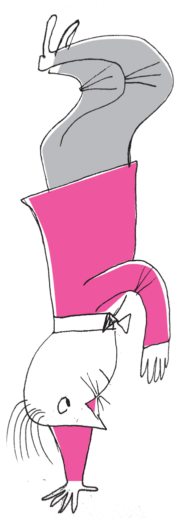
$$\frac{m+n}{p+1}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{m+n}{p},$$

z której wynika, że

$$p<m+n<p+1,$$

a to jest niemożliwe w zbiorze liczb naturalnych. Dowodzi to prawdziwości własności (i).

Zauważmy, że jedna z liczb α, β należy do przedziału $(1,2)$, a to gwarantuje, że $1\in A\cup B$. Istotnie, jeśli $\alpha>2$ i $\beta>2$, to $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{2}$, więc $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1$, co przeczy założeniu.



Jeśli liczba naturalna $q\geqslant 2$ i $q\notin A\cup B$, to istnieją liczby naturalne m i n takie, że

$$\alpha m<q<q+1<\alpha(m+1) \quad\text{i}\quad \beta n<q<q+1<\beta(n+1).$$

Wynikają stąd nierówności

$$\frac{m}{q}<\frac{1}{\alpha}<\frac{m+1}{q+1} \quad\text{i}\quad \frac{n}{q}<\frac{1}{\beta}<\frac{n+1}{q+1},$$

które po dodaniu stronami dają nierówność

$$\frac{m+n}{q}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1<\frac{m+n+2}{q+1}.$$

Stąd

$$m+n<q<q+1<m+n+2,$$

co jest niemożliwe w zbiorze liczb naturalnych. Zatem $A\cup B=\mathbb{N}$.

Złota proporcja to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek dłuższej z nich (a) do krótszej (b) spełniał proporcję $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\phi$.

Przykład. Jeśli $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ (ϕ to tzw. złota proporcja), to $\beta=1+\phi=\phi^2$ i

$$A=\{[n\phi]: n=1,2,\ldots\}=\{1,3,4,6,8,9,11,12,14,16,17,19,\ldots\},$$

$$B=\{[n\phi^2]: n=1,2,\ldots\}=\{2,5,7,10,13,15,18,20,\ldots\}.$$

Dla par

$$(a_n,b_n)=([n\phi],[n\phi^2]),\quad n=1,2,\ldots, \tag{1}$$

czyli $(1,2)$, $(3,5)$, $(4,7)$, $(6,10)$ itd., mamy następujące własności:

- $b_n-a_n=n$.

  Istotnie, ponieważ $\phi^2=1+\phi$, więc

  $$b_n-a_n=[n(1+\phi)]-[n\phi]=[n+n\phi]-[n\phi]=n+[n\phi]-[n\phi]=n.$$

  Zatem n-ta para jest postaci (a_n,a_n+n).

(••) a_n jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie wystąpiła w żadnej parze (a_k, b_k) dla $k < n$. Istotnie, niech c będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie wystąpiła wśród liczb a_k ani wśród liczb b_k dla $k \leqslant n-1$. Wtedy, zgodnie z twierdzeniem Lorda Rayleigha, liczba c musi wystąpić w zbiorze liczb a_k lub b_k dla $k \geqslant n$. Ponieważ najmniejszą liczbą naturalną w tych zbiorach jest liczba a_n ($a_j < a_{j+1}$, $b_j < b_{j+1}$ oraz $a_j < b_j$ dla wszystkich $j = 1, 2, \ldots$), więc $c = a_n$.

Również odwrotnie, pary liczb spełniające warunki (•) i (••) są postaci (1).

Oto dwie sytuacje, w których znajomość twierdzenia Lorda Rayleigha jest pomocna.

Problem olimpijski. Na XX Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (Bukareszt, 1978 r.) w pierwszym dniu zawodów pojawiło się następujące zadanie konkursowe:

Zadanie. *Zbiór liczb* $\{1, 2, \ldots\}$ *jest sumą dwóch rozłącznych podzbiorów* $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$ *i* $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$*, gdzie*

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,$$

$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots,$$

i $g(n) = f(f(n)) + 1$ *dla wszystkich* $n \geqslant 1$. *Wyznaczyć* $f(240)$.

Dla ucznia, który nie zna twierdzenia Lorda Rayleigha, problem wydaje się (jest?) beznadziejny (patrz J. Browkin, *Zbiór zadań z olimpiad matematycznych*, tom 6, WSiP, Warszawa 1983, zadanie 94).

Wiedza o twierdzeniu Lorda Rayleigha radykalnie zmienia sytuację. Załóżmy, że

$$f(n) = [\alpha n] \quad \text{i} \quad g(n) = [\beta n],$$

gdzie α i β są pewnymi liczbami niewymiernymi, takimi że $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Liczby α, β spróbujemy wyznaczyć z warunku $g(n) = f(f(n)) + 1$, czyli

$$(2) \qquad [\beta n] = [\alpha[\alpha n]] + 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Ponieważ przy $n \to \infty$, $\frac{[\beta n]}{n} \to \beta$ i $\frac{[\alpha n]}{n} \to \alpha$, więc

$$\frac{[\alpha[\alpha n]]}{n} = \frac{[\alpha[\alpha n]]}{[\alpha n]} \cdot \frac{[\alpha n]}{n} \to \alpha \cdot \alpha = \alpha^2.$$

Zatem dzieląc obie strony równości (2) przez n i przechodząc z $n \to \infty$, otrzymujemy $\beta = \alpha^2$. Wówczas z równości $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ mamy $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ i $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1{,}61803$ oraz $\beta = 1 + \alpha = \phi^2 \approx 2{,}61803$. Oczywiście ϕ i ϕ^2 są liczbami niewymiernymi takimi, że $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$. Zatem funkcje $f(n) = [\phi n]$ i $g(n) = [\phi^2 n]$ spełniają twierdzenie Lorda Rayleigha, czyli większość warunków zadania. Pozostaje pokazać, że spełniają one warunek (2). Nierówność $[\phi n] \leqslant \phi n < [\phi n] + 1$ mnożymy przez ϕ i mamy

$$\phi[\phi n] \leqslant \phi^2 n < \phi([\phi n] + 1) < \phi[\phi n] + 2,$$

$$[\phi[\phi n]] \leqslant [\phi^2 n] \leqslant [\phi([\phi n] + 1)] \leqslant [\phi[\phi n] + 2],$$

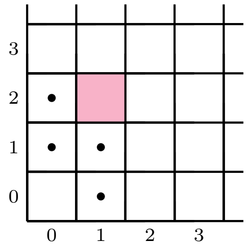
czyli

$$f(f(n)) \leqslant g(n) \leqslant f(f(n) + 1) \leqslant f(f(n)) + 2.$$

Ponieważ między liczbami naturalnymi $f(f(n))$ i $f(f(n)) + 2$ zawarta jest dokładnie jedna liczba naturalna, więc $g(n) = f(f(n)) + 1$. Oznacza to, że funkcje $f(n) = [\phi n]$ i $g(n) = [\phi^2 n]$ spełniają warunki zadania. Ponadto nietrudno wykazać za pomocą indukcji, że istnieje co najwyżej jedna para funkcji f i g, spełniających te warunki. Wobec tego

$$f(240) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 240\right] = 120 + [120\sqrt{5}] = 388.$$

Opis gry Wythoffa w języku szachów: figura królowej z szachów jest umieszczona na szachownicy nieograniczonej od góry i z prawej strony. Każdy z dwóch graczy, na przemian, wykonuje ruch królową. W jednym ruchu gracz może przesunąć królową o dowolną dostępną liczbę pól w dół albo na lewo, albo po przekątnej w kierunku boków ograniczających szachownicę. Zwycięzcą gry zostaje gracz, który pierwszy umieści królową w rogu szachownicy.



Rys. 1. Gracz B może wykonać ruch tylko tam, gdzie są kropki

Gra Wythoffa. W 1907 roku holenderski matematyk Willem Abraham Wythoff opisał następującą grę: para nieujemnych liczb całkowitych (P, Q) jest punktem początku gry. Gra toczy się między dwoma zawodnikami, którzy wykonują ruchy na przemian. Ruch każdego gracza polega na zastąpieniu punktu (P, Q) przez jeden z punktów

$$(P - M, Q), \quad (P, Q - M) \quad \text{lub} \quad (P - M, Q - M),$$

gdzie $M \geqslant 1$ jest liczbą naturalną i nowo uzyskaną parę (P', Q') tworzą nieujemne liczby całkowite. Pierwszy gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa (lub równoważnie, wygrywa gracz, który pierwszy osiągnie pozycję $(0, 0)$).

Przykładowa rozgrywka:

$$(16, 21) \xrightarrow{A} (16, 13) \xrightarrow{B} (12, 9) \xrightarrow{A} (5, 9) \xrightarrow{B} (2, 6) \xrightarrow{A} (2, 1) \xrightarrow{B} (\ldots).$$

W tym momencie gracz B ma możliwość ruchu na jedną z czterech pozycji (rys. 1): $(1, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 0)$. Bez względu na to, jaki ruch wykona gracz B, w następnym ruchu gracz A osiągnie pozycję $(0, 0)$ i zostanie zwycięzcą.

Gra może dostarczyć przyjemności, póki jeden z graczy nie odkryje *strategii wygrywającej*, tj. takiego postępowania, które przy możliwie najlepszej grze przeciwnika i tak zapewni mu zwycięstwo, oczywiście jeśli sam nie popełni błędu. Kto chce zmierzyć się z problemem, niech przerwie dalszą lekturę.

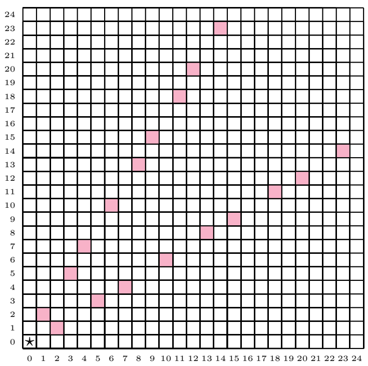
Rozstrzygnięcie zawiera twierdzenie.

Twierdzenie 2 (W.A. Wythoff, 1907 r.). *W grze Wythoffa strategia wygrywająca istnieje jedynie dla pozycji postaci* (a_n, b_n) *lub* (b_n, a_n)*, gdzie* $(a_n, b_n) = ([n\phi], [n\phi^2])$, $n \geqslant 1$.

Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ zbiór pozycji, o których mówi twierdzenie 2.

Uzasadnienie tego rezultatu wykorzystuje obserwacje z omawianego wcześniej przykładu.

Po pierwsze, wykonując ruch z pozycji należącej do zbioru $\mathcal{W}$, przechodzimy na pozycję, która nie należy do zbioru $\mathcal{W}$ (rys. 2).



Rys. 2

Na przykład nie ma żadnego ruchu z pozycji (a_n, b_n) do pozycji (a_m, b_m) lub (b_m, a_m), gdzie $m < n$. Jest tak, bo z określenia a_n (patrz (••)) $a_n \neq a_m$ i $a_n \neq b_m$. Ponadto $b_n > b_m > a_m$, zatem $b_n \neq a_m$ i $b_n \neq b_m$. Ruch wzdłuż przekątnej też nie daje sukcesu, bo $b_n - a_n = n$, a $b_m - a_m = m$.

Po drugie, zawsze istnieje ruch z pozycji nienależącej do zbioru $\mathcal{W}$ na pozycję należącą do zbioru $\mathcal{W}$ lub na pozycję $(0,0)$.

Niech gracz znajduje się w pozycji $(a,b) \notin \mathcal{W} \cup \{(0,0)\}$. Jeśli $a = b$ lub $a = 0$, lub $b = 0$, to jeden ruch pozwala znaleźć się na pozycji $(0,0)$ i zostać zwycięzcą.

Załóżmy, że $0 < a < b$. Przyjmijmy najpierw, że $a = a_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $b > b_n$, to istnieje bezpośredni ruch na pozycję (a_n, b_n). W przeciwnym razie $a_n < b < b_n$. Niech $m = b - a$. Wtedy $m < n = b_n - a_n$ (patrz (•)), więc $a_m < a_n$ i istnieje ruch na pozycję (a_m, b_m). W końcu, jeśli $a \neq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to zgodnie z twierdzeniem Lorda Rayleigha $a = b_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $b > a \geqslant a_n$ i istnieje ruch na pozycję (b_n, a_n). Gdy $0 < b < a$, rozumowanie jest podobne.

Wniosek. *Jeśli w grze Wythoffa gracz będzie wykonywał ruch z pozycji $(a,b) \in \mathcal{W}$ lub $a = b$, lub $a = 0$ lub $b = 0$ i nie popełni błędu, to zostanie zwycięzcą!*

Cykle Milankovića

Michał BEJGER

Okazuje się, że astrologowie mają rację: położenie planet ma kluczowy wpływ na nasze życie. Oczywiście jednocześnie mylą się, ponieważ wpływ planet jest inny, niż to wynika z wróżb i horoskopów. Ziemia jest jedną z planet Układu Słonecznego i jako taka podlega grawitacyjnym wpływom innych ciał niebieskich: Słońca, Księżyca i dużych planet, w szczególności Jowisza. Wpływy te są tak istotne, że kształtują klimat na Ziemi w długiej skali czasowej rzędu dziesiątek i setek tysięcy lat. W szczególności epizodyczna natura okresów zlodowaceń i interglacjałów (okresów, w których lodowce ustępują), która jest udokumentowana w skamieniałościach z ostatnich kilku milionów lat, powodowana jest przede wszystkim cyklicznymi zmianami w parametrach orbitalnych Ziemi w ruchu wokół Słońca.

Najważniejsze efekty planetarne odpowiedzialne za cykliczne zmiany klimatu to periodyczności w mimośrodzie orbity Ziemi, nachyleniu osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbity oraz precesji osi obrotu. Te periodyczne zmiany nazywane są *cyklami Milankovića*. Wymienione periodyczności są modyfikowane przez dodatkowe efekty: zmiany w nachyleniu płaszczyzny orbity Ziemi względem całkowitego orbitalnego momentu pędu Układu Słonecznego, wyznaczanego z grubsza przez układ Słońce–Jowisz, oraz precesję orbity Ziemi, czyli ruch peryhelium.

Milutin Milanković żył podobnie jak Tesla na przełomie XIX i XX wieku, był astronomem i klimatologiem, który zajmował się charakterystyką klimatów planet w Układzie Słonecznym i wyjaśnieniem długoterminowych zmian klimatu na Ziemi spowodowanych zmianami położenia Ziemi w stosunku do Słońca. Podobne hipotezy były proponowane w XIX wieku m.in. przez Josepha Adhemara i Jamesa Crolla, ale dopiero Milanković gruntownie przeanalizował przyczyny zmian.

Cykle są powiązane z ilością promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni Ziemi. Głównym czynnikiem zmian klimatu nie jest wyłącznie całkowita ilość energii docierająca ze Słońca na Ziemię, ale sezonowość w nadmiarze lub niedoborze energii na określonym obszarze Ziemi, np. północnej półkuli. W związku z tym okresy powiększonej lub zmniejszonej ilości promieniowania słonecznego bezpośrednio wpływają na skomplikowany układ zależności lądów i oceanów definiujący globalny klimat Ziemi, m.in. na pojawianie się, wzrost i cofanie się lodowców i związane z tym zmniejszanie lub zwiększanie się wilgotności atmosfery.