Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2020

Zadania z matematyki nr 807, 808

Redaguje Marcin E. KUCZMA

807. Dane są liczby $A, B > 0$; $AB < 1$. Funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A \cdot |x - y|, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant B \cdot |x - y|,$$

przy czym f jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$; ma więc funkcję odwrotną $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\;(f(h(x)) = h(f(x)) = x)$. Udowodnić, że funkcja $g + h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.

808. Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$.

Zadanie 808 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2020

Przypominamy treść zadań:

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $\lfloor ax + b\rfloor = \lfloor bx + a\rfloor$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji $(x_1, \ldots, x_p)$ zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \equiv r \pmod p.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

803. Dla ustalonej liczby całkowitej n przedział $I_n = \left[\frac{n-b}{a}, \frac{n+1-b}{a}\right)$ jest zbiorem tych liczb x, dla których $\lfloor ax + b\rfloor = n$, zaś przedział $J_n = \left[\frac{n-a}{b}, \frac{n+1-a}{b}\right)$ jest zbiorem tych x, dla których $\lfloor bx + a\rfloor = n$. Należy wykazać, że dla pewnego n część wspólna $I_n \cap J_n$ zawiera przedział długości $1/a$. Ponieważ przedział I_n ma taką właśnie długość, wystarczy, żeby był on zawarty w J_n. Taka inkluzja ma miejsce, gdy jednocześnie zachodzą nierówności $\frac{n-b}{a} \geqslant \frac{n-a}{b}$, $\frac{n+1-b}{a} \leqslant \frac{n+1-a}{b}$. Po prostym przekształceniu ta koniunkcja przybiera postać

$$n(a-b) \leqslant a^2 - b^2 \leqslant (n+1)(a-b);$$

wobec założenia $a > b$ jest to równoważne nierówności podwójnej

$$n \leqslant a + b \leqslant n + 1. \tag{1}$$

Zatem dla $n = \lfloor a + b\rfloor$ rozważany w zadaniu zbiór zawiera przedział I_n długości $1/a$.

W dalszej części zadania należy wykazać, że dla każdego $b > 0$ istnieje liczba $a > b$, dla której rozważany zbiór zawiera przedział dłuższy niż $1/a$. W tym celu bierzemy dowolną liczbę $a > b$ taką, że $a + b$ jest liczbą całkowitą. Wówczas każda z liczb całkowitych $n = a + b$ oraz $n = a + b - 1$ spełnia warunki (1). Dla pierwszej z tych liczb dostajemy przedział $I_n = \left[1, 1 + \frac{1}{a}\right)$, zaś dla drugiej $I_n = \left[1 - \frac{1}{a}, 1\right)$; i każdy z tych przedziałów zawiera się w rozważanym zbiorze. Łącząc je, dostajemy przedział długości $2/a$; więc większej niż $1/a$; a o to chodziło.

804. Teza wynika wprost z tego, że mnożenie przez element niezerowy jest bijekcją ciała $\mathbb{Z}_p$. W języku bardziej elementarnym: jeśli $(x_1, \ldots, x_p)$ jest permutacją zbioru $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, zaś r jest elementem zbioru $\{1, \ldots, p-1\}$, to reszty z dzielenia liczb $rx_1, rx_2, \ldots, rx_p$ przez p są wszystkie różne – tworzą więc także permutację zbioru $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Przy tym jeśli wyjściowa permutacja należała do zbioru A_1 – czyli spełniała zależność $\sum_{i=1}^{p} ix_i \equiv 1 \pmod p$ – to po pomnożeniu wszystkich jej wyrazów przez r utworzy permutację, w której analogiczna suma przystaje do r – czyli permutację należącą do zbioru A_r.

Zostało w ten sposób określone odwzorowanie ze zbioru A_1 do zbioru A_r. Ono jest odwracalne; weźmy bowiem element $t \in \{1, \ldots, p-1\}$, dla którego $rt \equiv 1 \pmod p$ (taki element t istnieje, bo reszty z dzielenia liczb $r, 2r, \ldots, (p-1)r$ przez p są wszystkie różne i niezerowe). Jeśli teraz permutacja $(y_1, \ldots, y_p)$ znajduje się w zbiorze A_r, to po pomnożeniu wszystkich wyrazów przez t znajdzie się w zbiorze A_1. Uzyskane odwzorowania $A_1 \to A_r$ (mnożenie przez r) oraz $A_r \to A_1$ (mnożenie przez t, gdzie $rt \equiv 1$) są wzajemnie odwrotne. To dowodzi, że zbiór A_r jest równoliczny ze zbiorem A_1. Skoro tak jest dla każdej niezerowej reszty r, znaczy to, że wszystkie zbiory $A_1, \ldots, A_{p-1}$ są równoliczne.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 797 ($WT = 2{,}57$) i 798 ($WT = 2{,}11$) z numeru 3/2020

Błażej Żmija	Kraków	48,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	47,63
Janusz Fiett	Warszawa	44,67
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,91
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,41
Marcin Małogrosz	Warszawa	36,93
Karol Matuszewski	Rawicz	36,19

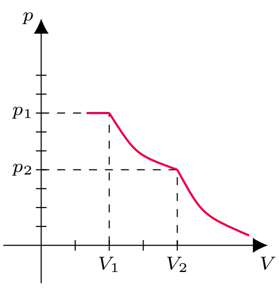
Trzej Panowie mijają linię magiczną *44 p.*: **Michał Adamaszek** po raz piąty – Weteran od 17 lat (potem długa przerwa); **Janusz Fiett** po raz trzeci – Weteran od dziś; **Błażej Żmija** – nowy przybysz do K44M!

Klub 44 F

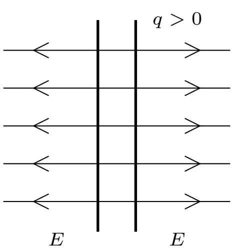
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
692 ($WT = 2{,}39$), 693 ($WT = 1{,}45$)
694 ($WT = 3{,}19$), 695 ($WT = 2{,}23$)
z numerów 2/2020 i 3/2020

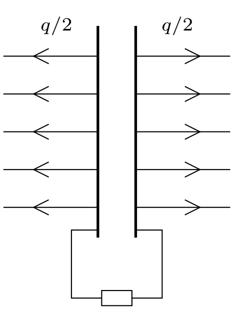
Paweł Perkowski	Ożarów	$3 - 44 + 9{,}03$
Michał Koźlik	Gliwice	42,82
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Krzysztof Magiera	Łosiów	39,55
Jacek Konieczny	Poznań	31,13
Ryszard Woźniak	Kraków	31,10
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Sławomir Buć	Mystków	25,72
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,58
Jan Zambrzycki	Białystok	23,16



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 704, 705

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

704. Wąska monochromatyczna wiązka światła laserowego pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione są pionowo. Jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt $\varphi < \pi/2$ wokół osi równoległej do szczelin siatki?

705. W jednorodnej kuli o promieniu $2R$ i gęstości ρ znajduje się współśrodkowa kulista wnęka o promieniu R. Znaleźć energię potencjalną punktu materialnego o masie m znajdującego się w wydrążeniu, w odległości $R/2$ od środka wydrążonej kuli. Oddziaływania zewnętrzne zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2020

Przypominamy treść zadań:

700. Jedna okładka powietrznego kondensatora płaskiego o pojemności c jest nienaładowana, druga jest naładowana ładunkiem q. Okładki połączono przewodnikiem o dużym oporze. Ile ciepła wydzieli się w przewodniku po długim czasie? Rozmiary okładek kondensatora są bardzo duże w porównaniu z odległością między nimi.

701. Mieszanina gazów złożona z $m_N = 100$ g azotu oraz nieznanej masy tlenu została poddana sprężaniu izotermicznemu w temperaturze $T = 74{,}4$ K. Wykres zależności ciśnienia tej mieszaniny od jej objętości przedstawia rysunek 1. Znaleźć masę tlenu oraz ciśnienie pary nasyconej tlenu w temperaturze T. Przy ciśnieniu normalnym T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu, a tlen wrze w wyższej temperaturze.

700. Przyjmijmy, że ładunek q jest dodatni, co nie zmniejsza ogólności rozważań. Linie pola elektrycznego przed połączeniem okładek przedstawione są na rysunku 2. Zgodnie z prawem Gaussa wartość wektora natężenia $E = q/(2\varepsilon_0 S)$, gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni, a S powierzchnią okładek.
Po połączeniu napięcie między okładkami wynosi zero, znika więc pole między okładkami, a ładunki na obu okładkach są równe $q/2$. Linie pola elektrycznego po połączeniu przedstawia rysunek 3, pole elektryczne na zewnątrz kondensatora jest takie samo jak przed połączeniem, czyli jego energia nie zmienia się.

Przed połączeniem pole między okładkami jest takie samo jak w kondensatorze naładowanym ładunkiem $q/2$. Ciepło wydzielone na oporniku jest równe energii takiego kondensatora: $W = q^2/(8c)$.

701. Z wykresu na rysunku 1 widać, że dla objętości $V < V_1$ tlen i azot skraplają się, a ciśnienie jest stałe i równe sumie ciśnień par nasyconych tlenu p_{O} i azotu p_{N} w temperaturze T, gdzie T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu pod ciśnieniem normalnym $p_a \cong 10^5 Pa$, zatem $p_1 = p_{\mathrm{O}} + p_a$. Dla objętości $V_1 < V < V_2$ następuje skraplanie jednego z gazów, a dla objętości $V > V_2$ pary obu gazów są nienasycone.

Załóżmy, że w punkcie (p_1, V_1) rozpoczyna się skraplanie azotu, a w punkcie (p_2, V_2) skraplanie tlenu. Wtedy $p_2 = p_{\mathrm{O}} + p_{2\mathrm{N}}$, gdzie $p_{2\mathrm{N}}$ jest ciśnieniem pary nienasyconej azotu w punkcie (p_2, V_2). Ponieważ dla objętości $V_1 \leqslant V \leqslant V_2$ azot jest tylko w stanie gazowym, zachodzi związek $p_{2\mathrm{N}} V_2 = p_a V_1$. Zgodnie z wykresem $p_{2\mathrm{N}} = p_a/2$ oraz $p_1/p_2 = 7/4 = (p_{\mathrm{O}} + p_a)/(p_{\mathrm{O}} + p_a/2)$. Stąd $p_{\mathrm{O}} = p_a/6 \cong 17\,\mathrm{kPa}$.

Przy założeniu, że tlen zaczyna się skraplać w punkcie (p_1, V_1), otrzymalibyśmy wynik $p_{\mathrm{O}} = 6p_a$, sprzeczny z faktem, że tlen wrze w temperaturze wyższej niż azot, czyli ciśnienie jego pary nasyconej w temperaturze T powinno być niższe niż p_a.

Masę tlenu m_{O} można znaleźć z równań Clapeyrona: $p_{\mathrm{O}} V_2 = m_{\mathrm{O}} RT/\mu_{\mathrm{O}}$ oraz $p_a V_1 = m_N RT/\mu_N$, gdzie R jest stałą gazową, a μ_{O}, μ_N masami molowymi tlenu i azotu. Stąd $m_{\mathrm{O}} \cong 38g$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.