



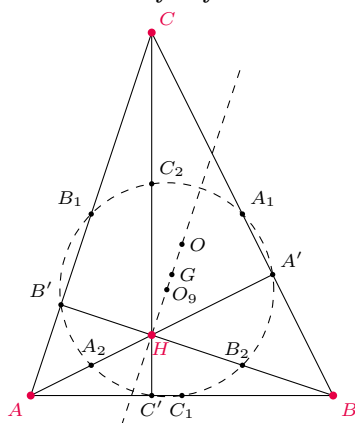
Jego Wysokości, część 2

Bartłomiej BZDEGA

Przed rozpoczęciem lektury niniejszego kącika warto zapoznać się z poprzednim, w którym zdefiniowany został *układ ortocentryczny* (na rysunku A, B, C, H) oraz jego *spodki* (A', B', C'), *odcinki* (AB, BC, CA, AH, BH, CH) i środki tych odcinków ($A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$).

Poruszając temat układów ortocentrycznych, byłoby nietaktem pominąć dwa słynne twierdzenia z nimi związane: o *okręgu dziewięciu punktów* i o *prostej Eulera*.

Układ ortocentryczny



Punkty A_1 i B_1 są środkami boków BC i CA , a punkty A_2 i B_2 – odcinków AH i BH , więc $A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$. Analogicznie dowodzimy, że $A_1B_2 \parallel CH \parallel A_2B_1$. Proste AH i BC są prostopadłe, więc czworokąt $A_1B_1A_2B_2$ jest prostokątem. Z tego wynika, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 są równej długości i mają wspólny środek. To samo można udowodnić dla odcinków B_1B_2 i C_1C_2 . Te trzy odcinki – A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 – są zatem średnicami tego samego okręgu – nazwijmy go o_9 . Na okręgu o_9 leży również punkt A' , gdyż albo $A' \in \{A_1, A_2\}$, albo $\sphericalangle A_1A'A_2 = 90^\circ$; analogicznie jest dla punktów B' i C' . Okrąg o_9 to słynny *okrąg dziewięciu punktów* trójkąta ABC .

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $-\frac{1}{2}$ względem ich wspólnego środka ciężkości G , zatem opisane na nich okręgi o i o_9 również są jednokładne względem G . Z tego wynika, że punkt G leży na odcinku OO_9 łączącym środki tych okręgów, przy czym $|O_9G| = \frac{1}{2}|OG|$. Co więcej, trójkąt $A_2B_2C_2$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $\frac{1}{2}$ względem punktu H , więc punkt O_9 jest środkiem odcinka OH . Z tego wynika, że punkty H, G i O leżą w tej kolejności na jednej prostej i zachodzi równość $|OH| = 2|OG|$. Nazywamy ją prostą Eulera trójkąta ABC .

Na koniec zauważmy, że w przypadku zdegenerowanego układu ortocentrycznego ($H = C$) zachodzą równości $C = H = A' = B' = C_2$ oraz $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$. Poza tym, że prostokąt $A_1B_1A_2B_2$ degeneruje się do odcinka, nie dzieje się nic, co mogłoby zaszkodzić przeprowadzonemu wyżej rozumowaniu.

Zadania

- Udowodnić, że jeśli punkty A, B, C, H tworzą układ ortocentryczny, to:
 - okręgi dziewięciu punktów trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH pokrywają się (czyli można mówić o okręgu dziewięciu punktów danego układu ortocentrycznego);
 - proste Eulera trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH mają punkt wspólny.
- Przy oznaczeniach z rysunku udowodnić, że punkty $A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2$ są środkami sześciu łuków, które na okręgu o_9 wyznaczają punkty A', B' i C' .
- Przy oznaczeniach z rysunku wykazać, że $|CH| = 2|OC_1|$.
- Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest równoramienny. Prosta ℓ przechodzi przez środek okręgu opisanego na tym trapezie, jest równoległa do jego podstaw i leży pomiędzy nimi, dwa razy bliżej prostej AB niż prostej CD . Punkt P jest rzutem punktu C na prostą ℓ . Dowieść, że $AP \perp BC$.
- W równoległoboku $ABCD$ kąt A jest ostry. Punkt K spełnia warunek $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCD = 90^\circ$. Prosta KB przecina odcinek AC w punkcie P . Udowodnić, że punkt P oraz środki odcinków AK, BK, CK leżą na wspólnym okręgu.
- Odcinki AA', BB' i CC' są wysokościami trójkąta różnobocznego ABC . Niech A^* oznacza punkt przecięcia prostych BC i $B'C'$, analogicznie definiujemy punkty B^* i C^* . Wykazać, że punkty A^*, B^*, C^* leżą na prostej prostopadłej do prostej Eulera trójkąta ABC .

Wskazówki do zadań

- (a) Spodki i środki odcinków układu ortocentrycznego nie zależą od tego, na który z tych trójkątów spojrzymy najpierw.
- (b) Każda z tych czterech prostych przechodzi przez punkt O_9 .
- Punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$, wpisane w trójkąt $A'B'C'$, a dwusieczne kątów wewnętrznego i zewnętrznego przecinają okrąg opisany na trójkącie w środkach odpowiednich łuków (zob. kącik nr 3).
- Trójkąty CHG i C_1OG są podobne (kk).
- Prosta ℓ jest prostą Eulera trójkąta ABC , bo leży na niej środek ciężkości G i środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt P jest ortocentrum trójkąta ABC , gdyż leży on na jego prostej Eulera oraz na wysokości poprowadzonej z wierzchołka C .
- Punkty A, B, C, K tworzą układ ortocentryczny, gdyż $AK \perp BC$ i $CK \perp AB$. Rozważycie okrąg dziewięciu punktów tego układu.
- Potęgi punktu A^* względem okręgów o , okręgu o średnicy BC oraz o_9 są równe, więc punkt A^* leży na osi potęgowej okręgów o i o_9 , czyli prostej prostopadłej do OO_9 (prostej Eulera). Analogicznie postępujemy z punktami B^* i C^* . (O potęgę punktu względem okręgu można przeczytać w kąciku nr 11).