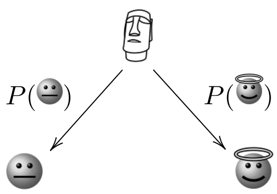
# Paradoks jednomyślności

*Marcin MAKOWSKI**

*Wydział Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku

Zgodnie ze starożytnym żydowskim prawem, jeśli oskarżony w wyniku procesu przed Sanhedrynem został jednogłośnie uznany za winnego zarzucanych mu czynów, to odstępuje się od wymierzenia kary! Taka zasada dla wielu Czytelników jest zapewne szokująca. Jednak ówcześni twórcy prawa uznawali, że jednomyślność sędziów często wskazuje na niedopatrzenie przy ocenie dowodów winy. To mogło wypaczyć wynik procesu. Intuicyjnie rozumiano, że jeśli coś wydaje się zbyt idealne, by mogło być prawdziwe, to najprawdopodobniej popełniono błąd, nawet jeśli jego natury nie dało się jednoznacznie ustalić. Podobny motyw często występuje w literaturze lub filmie, gdy nabieramy wątpliwości wraz z licznie pojawiającymi się dowodami, zbyt jednoznacznie wskazującymi na winę jednego z bohaterów (może ktoś celowo wplątuje go w popełnione przestępstwo?).

Spróbujmy skonstruować prosty probabilistyczny model, w którym da się zaobserwować paradoksalny efekt jednomyślności. To pozwoli nam lepiej zrozumieć, jakie są jego przyczyny. Posłużymy się pomysłem zaczerpniętym z pracy „Too good to be true: when overwhelming evidence fails to convince” [∗].




Rys. 1

Rozważmy oskarżonego 🗿 podejrzanego o popełnienie pewnego przestępstwa. Możemy go scharakteryzować jedną z dwóch wzajemnie wykluczających się cech: 😐 – winny, 😇 – niewinny. Każda z nich występuje odpowiednio z prawdopodobieństwem $P(\text{😐}) \neq 0$, $P(\text{😇}) \neq 0$, przy czym $P(\text{😐}) + P(\text{😇}) = 1$ (rys. 1).

Załóżmy, że o winie bądź niewinności oskarżonego decyduje 23 sędziów. Właśnie tylu członków liczył każdy z 5 okręgowych Sanhedrynów w starożytnej Judei. Chcemy obliczyć warunkowe prawdopodobieństwo $P(\text{😐}|k)$ tego, że oskarżony jest winny, gdy $k$ sędziów ($k = 1, \ldots, 23$) uzgodniło taki werdykt. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $P(k|\text{😐})$ – prawdopodobieństwo warunkowe, że $k$ sędziów uznało oskarżonego za winnego, jeśli był on winny,
- $P(k|\text{😇})$ – prawdopodobieństwo warunkowe, że $k$ sędziów uznało oskarżonego za winnego, jeśli był on niewinny,
- $P(k)$ – prawdopodobieństwo uznania przez $k$ sędziów winy oskarżonego.

Przypomnijmy tutaj, że jeśli $A$ i $B$ są pewnymi zdarzeniami o dodatnim prawdopodobieństwie, to prawdopodobieństwo $A$ pod warunkiem zajścia $B$ obliczamy według wzoru

$$P(A|B) = \frac{P(A\&B)}{P(B)},$$

gdzie przez $A\&B$ oznaczamy jednoczesne wystąpienie zdarzeń $A$ i $B$. Otrzymujemy wówczas

$$P(k) = P(k|\text{😐}) \cdot P(\text{😐}) + P(k|\text{😇}) \cdot P(\text{😇}) \qquad \text{(prawdopodobieństwo całkowite)},$$

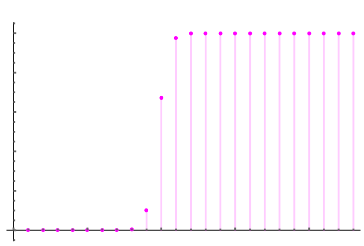
$$P(\text{😐}|k) = P(k|\text{😐}) \cdot \frac{P(\text{😐})}{P(k)} \qquad \text{(twierdzenie Bayesa)}.$$

Rozkład dwumianowy opisuje liczbę sukcesów przy zadanej liczbie niezależnych doświadczeń, z których każde ma tę samą szansę na powodzenie.

Zakładając, że każdy sędzia podejmuje decyzję niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem rozstrzyga o winie oskarżonego, możemy przyjąć *rozkład dwumianowy* jako model prawdopodobieństwa. Niech $W$ oznacza zdarzenie, że dowolnie ustalony sędzia uznał naszego oskarżonego za winnego. Niech $s = P(W|\text{😇})$ i $r = P(W|\text{😐})$. Mamy

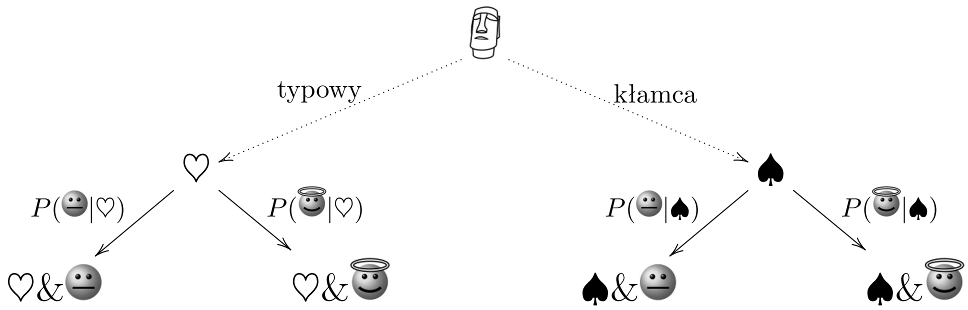
$$P(k|\text{😐}) = \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k}, \qquad P(k|\text{😇}) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k},$$

gdzie $n$ oznacza liczbę wszystkich sędziów. Rysunek 2 pokazuje, jak wartość $P(\text{😐}|k)$ zależy od $k$ (dla pewnych ustalonych wartości interesujących nas prawdopodobieństw). Wyniki są zgodne z naszą intuicją. Gdy ponad połowa z 23 sędziów uznaje oskarżonego za winnego, to prawdopodobieństwo, że jest winny, jest bliskie 1.



Rys. 2. $n = 23$, $P(W|\text{😇}) = 0{,}14$, $P(W|\text{😐}) = 0{,}75$, $P(\text{😐}) = P(\text{😇})$

Skomplikujmy nieco sytuację. Co, jeśli populacja potencjalnych oskarżonych nie jest tak homogeniczna? Być może sędziowie doskonale sobie radzą w typowych sytuacjach, gdy oskarżeni zachowują się zgodnie ze znanym im i dobrze zbadanym schematem. Wprowadźmy do naszego modelu pewne urozmaicenie. Załóżmy, że populacja potencjalnych oskarżonych składa się z osób typowych (oznaczanych przez $\heartsuit$) i pewnej domieszki nietypowych, których nazwiemy *kłamcami* (oznaczanych przez $\spadesuit$), którzy mają większą od typowego obywatela szansę na przekonanie sędziów do swojej niewinności (faktycznej lub nie). Każdy z nich może być winny albo niewinny, a sędziowie nie wiedzą, z kim mają do czynienia – rysunek 3.



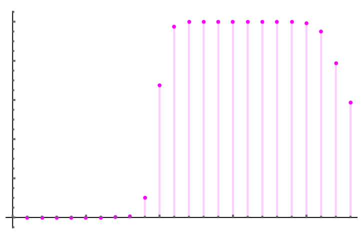

Rys. 3. Rozbicie populacji oskarżonych na dwa rozłączne podzbiory: typowych i kłamców. Prawdopodobieństwo wystąpienia każdego z nich to odpowiednio $P(\heartsuit)$ oraz $P(\spadesuit)$

W tym przypadku prawdopodobieństwo, że oskarżony jest winny, gdy $k$ sędziów uznało go za winnego, przedstawia poniższa formuła:

$$P(\text{😐}|k) = \frac{P(k|\text{😐}\&\heartsuit)\cdot P(\text{😐}|\heartsuit)\cdot P(\heartsuit) + P(k|\text{😐}\&\spadesuit)\cdot P(\text{😐}|\spadesuit)\cdot P(\spadesuit)}{P(k)}\,,$$

gdzie

$$\begin{aligned} P(k) = {} & P(k|\text{😐}\&\heartsuit)\cdot P(\text{😐}|\heartsuit)\cdot P(\heartsuit) + P(k|\text{😐}\&\spadesuit)\cdot P(\text{😐}|\spadesuit)\cdot P(\spadesuit) + \\ & + P(k|\text{😇}\&\heartsuit)\cdot P(\text{😇}|\heartsuit)\cdot P(\heartsuit) + P(k|\text{😇}\&\spadesuit)\cdot P(\text{😇}|\spadesuit)\cdot P(\spadesuit)\,. \end{aligned}$$



Rys. 4. $n = 23$, $P(\spadesuit) = 10^{-2}$, $P(W|\text{😇}\&\heartsuit) = 0{,}14$, $P(W|\text{😐}\&\heartsuit) = 0{,}75$, $P(W|\text{😐}\&\spadesuit) = P(W|\text{😇}\&\spadesuit) = 0{,}05$, $P(\text{😐}|\heartsuit) = P(\text{😇}|\heartsuit) = P(\text{😐}|\spadesuit) = P(\text{😇}|\spadesuit)$

Na rysunku 4 możemy zaobserwować, jak interesujące nas prawdopodobieństwo zależy od wartości $k$. Okazuje się, że gdy ilość sędziów uznających winę oskarżonego jest bliska 23, to prawdopodobieństwo $P(\text{😐}|k)$ spada! Dla jednomyślnej decyzji ($k = 23$) wynosi około 0,58. To dość zaskakujący efekt. Prawdopodobieństwo tego, że oskarżony jest winny, gdy sędziowie byli jednomyślni, nie odbiega zbytnio od prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w rzucie symetryczną monetą. Przyzwyczajeni jesteśmy raczej do sytuacji, gdy decyzje podejmowane są wolą większości, a im więcej osób się na nią zgodziło, tym lepiej. Nasz przykład pokazuje, że od pewnego momentu im bardziej jednomyślny jest rezultat procesu, tym jego wynik jest mniej wiarygodny. Ma to związek z niepewnością, jaką wprowadziliśmy do modelu, dodając do analizy nietypowego oskarżonego – *kłamcę*. Niepewność skutkuje nieregularnościami wyników. Wyobraźmy sobie grę w *Monopol*. Gdyby naszemu przeciwnikowi w każdym rzucie kośćmi wypadały dwie szóstki, to uznalibyśmy, że coś jest nie tak. Nasz przykład z kłamcami to nieco bardziej skomplikowany przejaw tego samego zjawiska.

Oczywiście niemądrze byłoby sugerować, że każda jednomyślna decyzja powinna budzić wątpliwości. Na przykład, gdy poprosimy kilkanaście osób, aby ze zdjęć trzech zwierząt: kota, psa i papugi wskazały fotografię przedstawiającą kota, to najpewniej wszyscy wskażą to samo zdjęcie. Ten wybór jest jednomyślny, bo właściwie nie miały na niego wpływu czynniki losowe (nie biorąc pod uwagę tych kilku osób, które zapewne postanowiłyby zrobić sobie z nas żarty). Jednak tak klarowne sytuacje to rzadkość. Zwykle nasze decyzje obarczone są pewnym ryzykiem wynikającym z braku pełnej informacji, fizycznego zmęczenia, doświadczeń życiowych, wywieranej presji i wielu innych czynników. Żyjemy w tak złożonym środowisku i sami jesteśmy na tyle skomplikowani, że gdy w ramach pewnej grupy nasze wybory staną się jednakowe, to warto się zatrzymać i zastanowić, czy nie wpadliśmy w pułapkę jednomyślności.

[*] L. J. Gunn, F. Chapeau-Blondeau, M. McDonnell, B. Davis, A. Allison oraz D. Abbott, „Too good to be true: when overwhelming evidence fails to convince", Proceedings of the Royal Society A vol. 472 (2016).