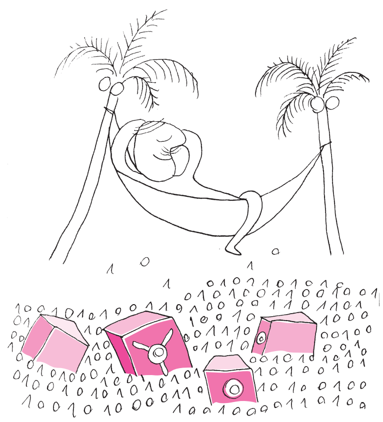
Leibniz i *Calculus*

*Jarosław GÓRNICKI**

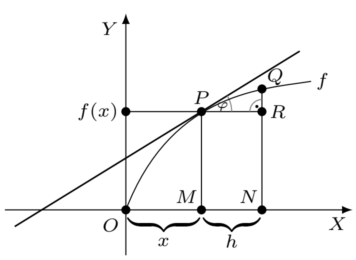
* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

W marcu 1672 roku do Paryża przybył z misją dyplomatyczną od elektora mogunckiego młody prawnik, filozof i erudyta Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Spotkanie z Christiaanem Huygensem (jesienią 1672 r.) przekonało Leibniza, że w matematyce jest nowicjuszem. Huygens, chcąc zbadać matematyczną przenikliwość Leibniza, rzucił mu takie oto wyzwanie: wyznaczyć sumę szeregu $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots$ Leibniz zadanie wykonał (a Ty? rozwiązanie na końcu artykułu). Sukces rozpalił jego zainteresowanie matematyką. Szczęśliwym trafem od stycznia do marca 1673 roku Leibniz przebywał w Londynie (drugi raz był tam w 1676 r.). Podczas tego pobytu nauczył się wiele o szeregach nieskończonych, studiował *Lectiones geometricae* Isaaca Barrowa z 1670 r., a za pośrednictwem Johna Collinsa zapoznał się z manuskryptem *De analysi per equationes numero terminorum infinites* Isaaca Newtona z 1669 r. Rozmawiał z Robertem Hooke'iem, Robertem Boylem, Johnem Pellem, a w *Royal Society* zademonstrował swoją maszynę rachunkową (lepszą od stworzonej przez Blaise Pascala). Po powrocie do Paryża, za namową Huygensa, Leibniz studiował prace Bonaventury Cavalieriego, Jamesa Gregory'ego, René Descartesa i Blaise Pascala. Tak wspominał odkrywanie swoich matematycznych możliwości: „byłem gotów radzić sobie bez jakiejkolwiek pomocy, ponieważ dzieła matematyczne czytałem prawie tak, jak inni czytają romanse". W Paryżu zainteresował się problemem zmienności: jak szybko zmienia się określona wielkość, i odwrotnie, jak na podstawie tempa zmiany pewnej wielkości określić jej wartość. Jesienią 1675 roku Leibniz znał już „nową metodę" – to co dzisiaj nazywamy rachunkiem różniczkowym i całkowym. Dostrzegł, że wyznaczenie stycznej do krzywej zależy od stosunku różnic rzędnych i odciętych, gdy te stają się nieskończenie małe.



Niech f będzie funkcją rzeczywistą, patrz rysunek 1. Każdej wartości x, w której funkcja f ma styczną, odpowiada wartość $\operatorname{tg}\varphi$, gdzie φ jest kątem nachylenia tej stycznej do kierunku osi OX. Tak określoną nową funkcję nazywamy *pochodną* funkcji f. Oznaczmy ją symbolem $\frac{df}{dx}$ lub df. Działanie polegające na obliczeniu pochodnej nazywamy *różniczkowaniem*. Załóżmy, że krzywa f posiada w ustalonym punkcie $P(x, f(x))$ styczną (rys. 1). Niech punkt $Q(x+h, f(x+h))$ będzie punktem zmiennym. Wówczas

$$\frac{QR}{PR} = \frac{NQ - MP}{MN} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{gdy} \quad h \to 0.$$



Rys. 1

Dla przykładu, ponieważ

$$(x+h)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n - x^n = nx^{n-1}h + \ldots,$$

gdzie dalsze wyrazy zawierają wyższe potęgi przyrostu h, więc

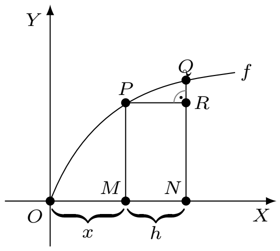
$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \to nx^{n-1}, \quad \text{gdy} \quad h \to 0.$$

Pochodną funkcji x^n jest więc funkcja $dx^n = nx^{n-1}$, która przedstawia chwilowe tempo zmian wielkości x^n. Do obliczania pochodnych bardziej skomplikowanych funkcji Leibniz zaproponował postępowanie algorytmiczne oparte na wykorzystaniu wzorów (f i g to funkcje rzeczywiste, A to liczba rzeczywista):

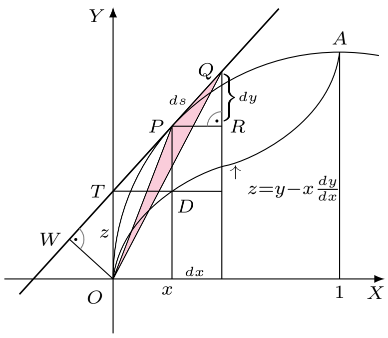
$$d(A \cdot f) = A \cdot df, \quad d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g \ - f \cdot dg}{g \cdot g}, \quad d(f(g)) = (df) \cdot (dg).$$

Operacją w pewnym sensie odwrotną do różniczkowania jest znajdowanie dla danej funkcji f takiej funkcji Φ, aby $d\Phi = f$. Na przykład dla funkcji $f(x) = x^n$ możemy odgadnąć, że $\Phi(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, bo $d(\frac{1}{n+1}x^{n+1}) = x^n$. Procedurę znajdowania takich funkcji Φ nazywamy *całkowaniem* i zapisujemy $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ (c jest dowolną stałą).



Rys. 2



Rys. 3

Kluczowe w rozumowaniu Leibniza (i Newtona) było odkrycie zależności między pochodną funkcji pola a krzywą, która to pole ogranicza (rys. 2). Niech f będzie funkcją ciągłą. Oznaczmy pole figury krzywoliniowej $OPMO$ przez $\Phi(x)$, a pole figury krzywoliniowej $OPQNMO$ przez $\Phi(x+h)$. Wówczas

$$\Phi(x+h)-\Phi(x) = (\text{pole } MPQNM) =$$
$$= (\text{pole } MPRNM) + (\text{pole } PQRP) = h\cdot f(x) + h\cdot\lambda(h),$$

gdzie $\lambda(h)$ oznacza odległość pewnego punktu z łuku PQ od prostej PR. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, więc jeśli $h\to 0$, to $\lambda(h)\to 0$. Zatem

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \to f(x), \quad \text{gdy} \quad h\to 0.$$

Oznacza to, że rzędna krzywej jest pochodną funkcji pola pod tą krzywą. Aby obliczyć pole $OPMO$ pod krzywą f, wystarczy wskazać taką funkcję Φ, aby $d\Phi(x) = f(x)$, oczywiście przy założeniu, że $\Phi(0)=0$. Symboliczny zapis tej procedury Leibniz podał 11 listopada 1675 roku w postaci: (pole $OPMO$) $= \int_0^x f(t)dt$.

Jednym z pierwszych rezultatów „nowej metody” Leibniza jest niezwykła kwadratura koła. Uwagę Leibniza zwrócił rysunek Pascala nieskończenie małego trójkąta o bokach dx, dy, ds. Pascal wyznaczył pole pod nieskończenie małym łukiem, zastępując łuk odcinkiem ds stycznej (rys. 3).

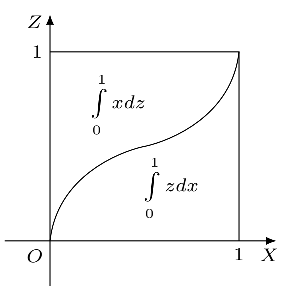
Leibniz zaproponował takie rozwiązanie: na okręgu $(x-1)^2+y^2=1$, czyli $x^2+y^2=2x$, rozważmy punkt $P(x,y)$ i leżący na stycznej (nieskończenie blisko) punkt $Q(x+dx, y+dy)$. Trójkąt $\triangle PQR$ jest podobny do trójkąta $\triangle TPD$ i do $\triangle TOW$, więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{PD}{TD} = \frac{y-z}{x}, \quad \text{skąd} \quad z = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Ponieważ $\frac{z}{h} = \frac{ds}{dx}$, więc $hds = zdx$ i (pole $\triangle OPQ$) $= \frac{1}{2}\cdot hds = \frac{1}{2}\cdot zdx$ jest równe połowie pola nieskończenie wąskiego prostokąta o bokach z i dx (i wierzchołku D) leżącego pod krzywą $z = y - x\frac{dy}{dx}$.

Zatem pole odcinka koła $OPAO$, jako suma pól nieskończenie wąskich trójkątów, jest równe połowie pola pod krzywą $z = y - x\frac{dy}{dx}$: (pole odcinka $OPAO$) $= \frac{1}{2}\int_0^1 zdx$. W tej sytuacji pole czwartej części koła jednostkowego jest równe

$$\frac{\pi}{4} = (\text{pole } \triangle OA1) + (\text{pole odcinka } OPAO) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 zdx,$$



Rys. 4

gdzie $z = y - x\frac{dy}{dx}$. Różniczkując równanie okręgu, Leibniz otrzymał $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2$, skąd $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$. Wówczas $z = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, ale wtedy $z^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{2x-x^2} = \frac{x}{2-x}$, skąd $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$. Korzystając z oczywistej zależności, przedstawionej na rysunku 4, mamy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 zdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(1 - \int\limits_0^1 xdz\Big) = 1 - \int\limits_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}dz.$$

Rozwijając ułamek $\frac{z^2}{1+z^2}$ w szereg nieskończony za pomocą działań algebraicznych, tak jak robił to Mercator, Leibniz uzyskał szereg

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots,$$

a całkując go wyraz po wyrazie, otrzymał

$$1 - \int\limits_0^1 \frac{z^2}{1+z^2}dz = 1 - \int\limits_0^1 (z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \ldots)dz =$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 + \ldots\right)\Bigg|_{z=1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Dodatkowo Leibniz wiedział, że otrzymany szereg jest zbieżny. Istotnie,

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right),$$

Obecnie wykazanie tożsamości Leibniza jest standardową umiejętnością,

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Ostatnia całka dąży do zera, gdy $|x| \leqslant 1$, gdyż

$$\Big|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x t^{2n+2}\,dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{2n+3}|x|^{2n+3} \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Zatem dla $|x| \leqslant 1$ funkcja $\operatorname{arc\,tg} x$ ma rozwinięcie w postaci szeregu $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ i dla $x = 1$, mamy $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

W tych czasach szyfrowanie wiadomości nie było niczym niezwykłym. Jeszcze Carl Gauss w swoim *Dzienniku* pod datą 10 lipca 1796 roku napisał

$$\text{EYPHKA. } num = \triangle + \triangle + \triangle.$$

Mając wtedy 19 lat, odkrył dowód wyjątkowego rezultatu: *każda dodatnia liczba całkowita jest sumą trzech liczb trójkątnych* $\{0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots\}$.

Anagram Newtona „***6acc. . . 12vx***” oznacza *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa* (list był pisany po łacinie), czyli „według danego równania, zawierającego ilekolwiek fluent, znaleźć fluksje i na odwrót”.

W pracy *Nova methodus. . .* , pierwszej publikacji z rachunku różniczkowego, jest warunek $dv = 0$ dla maksimum lub minimum $d\,dv = 0$ dla punktu przegięcia.

Leibnizowi zawdzięczamy (obok d-notacji: $\frac{df}{dx}$, $\int f(x)dx$) również nazwy *calculus differentialis* i *calculus integralis*, użycie symbolu „=” na równość, kropki dla mnożenia, terminy *funkcja* oraz *współrzędne*.

Rozwiązanie zadania z początku artykułu: dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1},$$

zatem rozważany szereg jest zbieżny, a jego suma to 2.

więc $S_2 < S_4 < S_6 < \ldots$ i

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3}\right) - \frac{1}{2n-1} < 1,$$

zatem $S_{2n} \to s$, gdy $n \to \infty$. Wtedy również $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to s$, gdy $n \to \infty$.

Ostatecznie Leibniz otrzymał równość:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

O swoim odkryciu Leibniz powiadomił Huygensa, szczegółowo opisał swoją metodę w liście z 27 sierpnia 1676 roku przesłanym Newtonowi za pośrednictwem H. Oldenburga (sekretarza *Royal Society*). W odpowiedzi, w liście do Oldenburga z 24 października 1676 roku, Newton pisał: „metoda Leibniza otrzymania szeregu zbieżnego [do $\frac{\pi}{4}$] jest z pewnością bardzo elegancka i wystarczająco ujawnia geniusz jej autora, nawet jeśli nie napisze on nic więcej”. Jednak na prośbę Leibniza o ujawnienie swoich metod Newton pisał: „Podstawy tych operacji są w istocie dość oczywiste, ale ponieważ nie mogę kontynuować wyjaśnienia tego teraz, wolałem to ukryć:

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx.

Na tym fundamencie próbowałem również uprościć teorie, które dotyczą kwadratury krzywych i doszedłem do pewnych ogólnych twierdzeń”.

Po powrocie z Paryża, w październiku 1676 roku, Leibniz pozostał w służbie księcia Hanoweru. Zajmował się biblioteką, genealogią, prawodawstwem, techniką, dyplomacją, ale przede wszystkim był filozofem. Był inicjatorem utworzenia Akademii Nauk w Berlinie (11 lipca 1700 r.) i jej pierwszym przewodniczącym. W swoich działaniach dążył do pogodzenia wiary i rozumu, religii i nauki, idealizmu z materializmem. Prowadził ożywioną korespondencję z ponad 600 osobami. Zachowało się około 15 tysięcy jego listów, w istocie esejów.

Po *Elementach* Euklidesa rachunek różniczkowy i całkowy pozostaje największym osiągnięciem matematyki. To dzięki niemu wiemy, że świat funkcjonuje zgodnie z pewnymi zasadami matematyki i fizyki, które umożliwiają przewidywanie wyników określonych działań. Newton pierwszy odkrył rachunek różniczkowy i całkowy, w latach 1664–1666, podchodząc do problemu kinematycznie, ale z ogłoszeniem swoich wyników zwlekał. Leibniz, niezależnie od Newtona, odkrył rachunek różniczkowy i całkowy później, w latach 1672–1676, na drodze rozważań algebraiczno-geometrycznych. Leibniz (pomijając korespondencję, gdzie uczynił to jeszcze wcześniej) pierwszy ogłosił pracę o rachunku różniczkowym *Nova methodus pro maximis et minimis,...* w „Acta Eruditorum” 3 (1684), 467–472, oraz pierwszą pracę o rachunku całkowym *De geometria recondita et analysi. . .* w „Acta Eruditorum” 5 (1686), 292–300. Newton zrobił to dopiero w traktacie *De quadratura curvorum* z 1704 r., a praca Newtona *The Method of Fluxions* (1736) ukazała się niemal dziesięć lat po jego śmierci. Dodatkowo metoda Leibniza była bez porównania lepiej opracowana (trafnie dobrana symbolika, nazewnictwo) i do dziś jest używana.

Spór o pierwszeństwo (wywołany przez przesadnie patriotycznych przyjaciół Newtona) na całe stulecia zatruł relacje między matematykami z wysp i z kontynentu. Drogą wytyczoną przez Leibniza poszli uczeni tej miary co Jacob Bernoulli (ur. 1654 r.), Johann Bernoulli (ur. 1667 r.), markiz de L’Hôpital (autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego *Analyse des infiniment petits. . .* (Paryż, 1696), napisanego na podstawie wykładów Johanna Bernoulliego). Ich następcy na kontynencie, Leonhard Euler, Joseph Lagrange, Pierre de Laplace, wytyczali dalsze kierunki badań.

Wielkim przegranym okazał się Leibniz, odszedł niezauważony i zapomniany. W luterańskim Neustädter Kirche w Hanowerze znajduje się jego skromne epitafium OSSA LEIBNITII (prochy Leibniza).