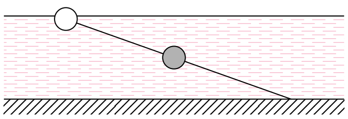
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2020

Zadania z fizyki nr 702, 703

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

702. Ciężką kulkę przymocowano do środka cienkiego pręta, a kulkę lekką o takim samym promieniu przymocowano do jednego z końców pręta. Układ zanurzono w niezbyt głębokiej wodzie (rys. 1). Pręt jest pochylony, jego swobodny koniec opiera się o dno, z wody wystaje część lekkiej kulki, przy czym stosunek objętości części wynurzonej do objętości całej kulki wynosi n. Czy w głębokiej wodzie układ będzie pływał, czy utonie? Należy przyjąć, że masy pręta i lekkiej kulki są zaniedbywalne.



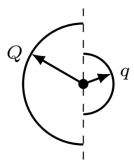
Rys. 1

703. Gdy do ciężarka o masie m zawieszonego na sprężystej nici przykładamy siłę działającą pionowo w dół, której wartość rośnie stopniowo od zera, nić ulegnie zerwaniu, gdy przyłożona siła osiągnie wartość F. Jaką stałą minimalną siłą należy działać, aby nić uległa zerwaniu?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2020

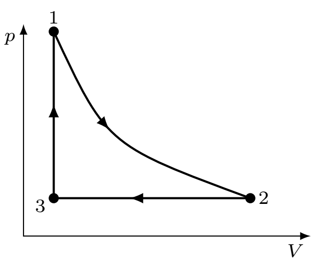
Przypominamy treść zadań:

698. Znaleźć siły oddziaływania dwóch nieprzewodzących półsfer o promieniach R i r, naładowanych odpowiednio ładunkami Q i q, rozłożonymi równomiernie na powierzchniach półsfer. Środki półsfer oraz płaszczyzny ich maksymalnych przekrojów pokrywają się (rys. 2).



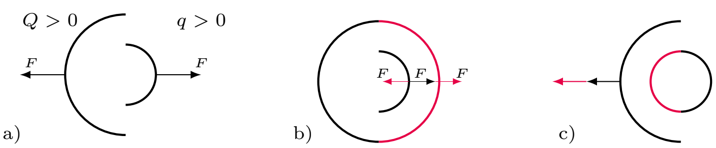
Rys. 2

699. Cykl termodynamiczny składa się z izotermy, izobary oraz izochory (rys. 3). Gaz poddawany przemianom jest doskonały, jednoatomowy. Na izotermie gaz pobiera ciepło Q_{12}, na izobarze wykonana zostaje nad nim praca W_{23}. Oblicz sprawność cyklu.



Rys. 3

698. Na rysunku 4a pokazane są wektory sił oddziaływania sfer w przypadku jednoimiennych ładunków Q i q, co nie zmniejsza ogólności rozwiązania.



Rys. 4

Jeżeli do układu dodamy drugą dużą półsferę, jak na rysunku 4b, również naładowaną ładunkiem Q, to siła działająca na półsferę o promieniu r będzie równa zeru, bo wewnątrz naładowanej sfery nie ma pola elektrycznego. Zatem półsfery o promieniach R działają na małą półsferę siłami, które się równoważą.

Jeżeli małą półsferę uzupełnimy drugą, naładowaną ładunkiem q, jak na rysunku 4c, to na półsferę o promieniu R będzie działała siła $2F$.

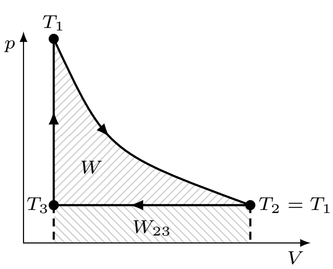
Natężenie pola elektrycznego na zewnątrz sfery o promieniu r naładowanej ładunkiem $2q$ w odległości R od jej środka ma wartość $E = 2q/\left(4\pi\varepsilon_0 R^2\right)$, gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Ciśnienie na dużą półsferę wynosi $p = E\sigma$, gdzie $\sigma = Q/\left(2\pi R^2\right)$ jest gęstością powierzchniową ładunku. Zatem siła działająca na dużą półsferę ze strony małej sfery dana jest wzorem $2F = \pi R^2 p$.

Szukana siła oddziaływania między półsferami ma wartość

$$F = qQ/\left(8\pi\varepsilon_0 R^2\right).$$

699. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki wartość bezwzględna pracy, jaką gaz wykonuje podczas przemiany izotermicznej, równa jest ciepłu pobranemu w tej przemianie: $|W_{12}| = Q_{12}$. Praca uzyskana w cyklu

$$W = |W_{12}| - W_{23} = Q_{12} - W_{23} \quad \text{(rys. 5)}.$$



Rys. 5

Ciepło pobrane w cyklu $Q_1 = Q_{12} + Q_{31}$, gdzie $Q_{31} = nc_V\,(T_1 - T_3)$ jest ciepłem pobranym na izochorze, n oznacza liczbę moli, $c_V = 3R/2$ jest molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego. Z równania Clapeyrona $nR\,(T_1 - T_3) = p\,(V_2 - V_1)$, gdzie p jest ciśnieniem na izobarze, V_2 i V_1 to objętości odpowiednio na początku i końcu tej przemiany. Stąd $Q_{31} = 3W_{23}/2$.

Sprawność cyklu dana jest wzorem

$$\eta = W/Q_1 = (Q_{12} - W_{23})/(Q_{12} + 3W_{23}/2).$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 688 ($WT = 3{,}77$), 689 ($WT = 2{,}76$) 690 ($WT = 2{,}33$), 691 ($WT = 1{,}97$) z numerów 12/2019 i 1/2020

Paweł Perkowski	Ożarów	43,99
Michał Koźlik	Gliwice	42,37
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Krzysztof Magiera	Łosiów	34,59
Jacek Konieczny	Poznań	31,13
Ryszard Woźniak	Kraków	31,10
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Sławomir Buć	Mystków	23,63
Tomasz Wietecha	Tarnów	20,90
Jan Zambrzycki	Białystok	19,49

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2020

Zadania z matematyki nr 805, 806

Redaguje Marcin E. KUCZMA

805. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\dots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_{i+1} jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1}=A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

806. Nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1=2$; $a_{n+1}=2^{a_n}+2$ dla $n\geqslant 1$. Niech $f(x)=x^2-x$. Udowodnić, że dla każdego $n\geqslant 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

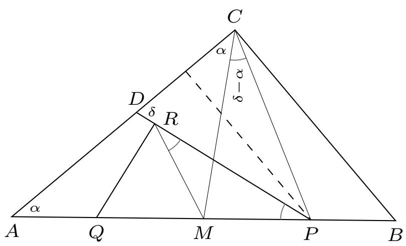
Zadanie 806 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2020

Przypominamy treść zadań:

801. Na przeprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC został dowolnie wybrany punkt D. Symetralna odcinka CD przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do P względem środka M odcinka AB. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu Q na prostą DP. Udowodnić, że M leży na dwusiecznej kąta PCR.

802. Niech $x_1, x_2, x_3, \dots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb x spełniających równanie $\operatorname{tg} x = x$. Niech $y_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - x_n$. Obliczyć granicę ciągu (ny_n) przy $n\to\infty$ (lub wykazać, że granica nie istnieje).



801. Trójkąty AMC i CPD są równoramienne. Przyjmijmy oznaczenia: $|\sphericalangle CAM|=|\sphericalangle ACM|=\alpha$, $|\sphericalangle CDP|=|\sphericalangle DCP|=\delta$; zatem $|\sphericalangle CPD|=180^\circ-2\delta$. Środek odcinka CD leży bliżej punktu C niż punktu A, wobec czego punkt P leży między M i B; w takim razie $|\sphericalangle MCP|=\delta-\alpha$. Rachunek kątów w trójkącie ACP pokazuje, że $|\sphericalangle APR|=\delta-\alpha$.

Ponieważ $QR\perp PR$, trójkąt PMR jest równoramienny, więc $|\sphericalangle MRP|=|\sphericalangle MPR|=\delta-\alpha$. Uzyskujemy równość $|\sphericalangle MCP|=|\sphericalangle MRP|$, z której wynika, że czworokąt $MPCR$ ma okrąg opisany. Skoro $|MP|=|MR|$, punkt M jest środkiem łuku PR tego okręgu; a to znaczy, że półprosta CM połowi kąt PCR. To teza zadania.

802. Dla $x\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$, więc w tym przedziale nie leży żaden wyraz ciągu (x_n). W każdym dalszym przedziale dodatniości funkcji tangens leży jeden wyraz. Tak więc $n\pi < x_n < \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. Wobec określenia $y_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - x_n$ wynika stąd, że $y_n\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ oraz

$$\operatorname{tg} y_n = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - x_n\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x_n} = \frac{1}{x_n} \longrightarrow 0 \quad \text{gdy } n\to\infty.$$

W takim razie $y_n\to 0$. A skoro $x_n/n\to\pi$ (oraz $\operatorname{tg} z/z\to 1$ gdy $z\to 0$), zatem

$$ny_n = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}\cdot n\operatorname{tg} y_n = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}\cdot\frac{n}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{\pi}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 795 ($WT=1{,}59$) i 796 ($WT=2{,}34$) z numeru 2/2020

Łukasz Merta	Kraków	44,07
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Błażej Żmija	Kraków	43,66
Michał Adamaszek	Kopenhaga	42,95
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,63
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,30
Karol Matuszewski	Rawicz	34,08

W matematycznym **Klubie 44** nowa postać: pan Łukasz Merta. Witamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT=4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Rozwiązanie zadania F 1007. Jeżeli nieprzezroczyste ciało absorbuje część a energii padającej na jego powierzchnię, to z zasady zachowania energii wynika, że pozostały ułamek $r=1-a$ energii jest przez tę powierzchnię odbijany i rozpraszany do otoczenia. Przyjrzyjmy się energii docierającej od ciała A do B. Emitowany przez powierzchnię A strumień energii, równy $\sigma a_1 T_1^4$, w całości dociera do B. Tam jego część a_2 jest przez B absorbowana, a część $r_2=1-a_2$ jest rozpraszana (odbijana) i w całości wraca do A (obie powierzchnie traktujemy jak nieskończone płaszczyzny – zaniedbujemy efekty brzegowe), gdzie jej część a_1 jest absorbowana, a część $r_1=1-a_1$ odbijana itd. Od A do B, w wyniku nieskończonej liczby odbić, dociera więc strumień energii:

$$I_{\mathrm{AB}} = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n r_2^n = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \frac{1}{1-r_1 r_2}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymamy dla strumienia I_{BA} docierającego od B do A, ale z T_2 w miejscu T_1. Ostatecznie, poszukiwany strumień I energii netto przepływającej między ciałami wynosi

$$I = I_{\mathrm{AB}} - I_{\mathrm{BA}} = \frac{\sigma a_1 a_2 (T_1^4 - T_2^4)}{1-r_1 r_2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-1}.$$

Do uzyskania ostatniego wyrażenia skorzystaliśmy z definicji współczynników r_1, r_2. Po podstawieniu danych liczbowych: $I = 121\ \mathrm{Wm^{-2}}$.