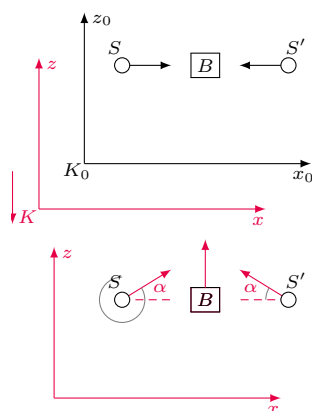


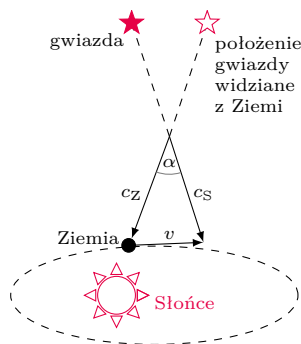
# Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

Albert EINSTEIN

Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Jego artykuł popularny *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy* jest nieznanym szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim *Technical Journal* (Haifa), 1946, V, 16–17. Polski tekst artykułu jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranie nauchnyh trudov*, tom 2, 650–652, Izd. Nauka, Moskwa 1966]. Przedruki tego tekstu znajdują się w  $\Delta_{12}^9$ ,  $\Delta_{05}^6$  oraz  $\Delta_{20}^9$ .



Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po małej elipsie (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światła gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).



Wobec tego, że  $v \ll c$ , gdzie  $c$  – wartość prędkości światła, więc  $c_z \approx c_s - v$  i kąt aberracji  $\alpha = \frac{v}{c}$  (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ( $v \ll c$ ) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza. Ponieważ dla  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$  transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek  $E = pc$ , spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony za pomocą transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dosyć długi.

Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się jedynie na trzech znanych wcześniej prawach:

- (1) zasadzie zachowania pędu,
- (2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli – pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,
- (3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli – na prawie Bradleya).

Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało  $B$  spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia  $K_0$ . Dwa pakiety falowe  $S$  i  $S'$ , o energii  $E/2$  każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi  $x_0$ , padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o  $E$ . Ciało  $B$  pozostaje przy tym w spoczynku względem układu  $K_0$ , a wynika to z symetrii zagadnienia. Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia  $K$  poruszającego się względem układu  $K_0$  ze stałą prędkością o wartości  $v$  w ujemnym kierunku osi  $z_0$ . W układzie  $K$  rozważany proces opisuje się następująco: ciało  $B$  porusza się w dodatnim kierunku osi  $z$  z prędkością o wartości  $v$ . Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie  $K$  tworzą z osią  $x$  kąt  $\alpha$ . Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek:  $\alpha = v/c$ , gdzie  $c$  – prędkość światła. Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie  $K_0$  wiemy, że prędkość ciała  $B$  po pochłonięciu pakietów falowych  $S$  i  $S'$  nie ulegnie zmianie. Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku  $z$  w układzie  $K$ .

I. Niech  $M$  oznacza masę ciała  $B$  do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie  $Mv$  jest pędem ciała  $B$  (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię  $E/2$ , a więc – zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella – jego pęd ma wartość  $E/2c$ . Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równy pęd pakietu falowego  $S$  względem układu odniesienia  $K_0$ . Kiedy jednak prędkość  $v$  jest mała w porównaniu z  $c$ , wówczas pęd w układzie  $K$  ma taką samą wartość – z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu ( $v^2/c^2$  w porównaniu z 1). Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi  $z$  jest równa  $\frac{E}{2c} \sin \alpha$ , albo – z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) –  $\frac{E}{2c} \alpha$  lub  $\frac{E}{2} \frac{v}{c^2}$ . Zatem składowe pędów pakietów falowych  $S$  i  $S'$  wzdłuż osi  $z$  są w sumie równe  $E \frac{v}{c^2}$ . Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{c^2}v.$$

II. Niech  $M'$  oznacza masę ciała  $B$  po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii  $E$  (jest to konieczne, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi  $z$ . Daje to związek

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

lub

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o  $E$  wiąże się ze wzrostem masy o  $\frac{E}{c^2}$ . A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = Mc^2.$$