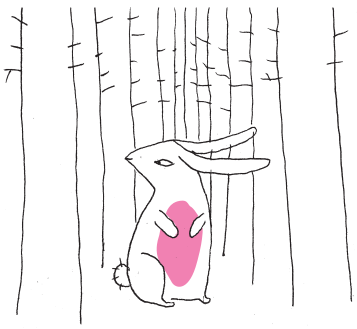


Stąd jeśli punkt kratowy (x,y) leży w rozpatrywanym zbiorze, to otrzymujemy:
$$\frac{d}{c}\cdot x+\frac{ad-bc}{c}<y<\frac{d}{c}\cdot x+\frac{bc-ad}{c}, \qquad ad-bc<cy-dx<bc-ad.$$
Zatem $cy-dx=0$, czyli punkt (x,y) o współrzędnych względnie pierwszych leży na prostej łączącej O z $X+Y$, ale jedynym takim punktem z „listy” Brocota–Sterna jest punkt $X+Y$.

Z nierówności $r\geqslant\frac{1}{|X+Y|}$ wynika, że prosta łącząca O z $X+Y$ nie może ominąć drzewa w punkcie X ani Y. Jeśli weźmiemy inną czwórkę punktów $O,P,Q,P+Q$, przy czym punkty P, Q leżą w sadzie i każdy z nich ma współrzędne względnie pierwsze oraz punkt $P+Q$ leży na zewnątrz sadu, to $|P+Q|\geqslant|X+Y|$ oraz $\frac{1}{|P+Q|}\leqslant\frac{1}{|X+Y|}$. Jeśli weźmiemy promień drzewa równy $\frac{1}{|X+Y|}$, to prosta łącząca O z $P+Q$ nie ominie punktu P ani Q. $\square$

Możemy teraz postawić kropkę nad i – znaleźć minimalny promień drzew dla sadu bez prześwitów. Z twierdzenia wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej s ten minimalny promień oblicza się ze wzoru
$$r_{\min}=1/\min\{\sqrt{a^2+b^2} : a,b\in\mathbb{Z}, \sqrt{a^2+b^2}>s\}.$$
Oczywiście $s^2+1^2=s^2+1>s^2$, więc $r_{\min}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

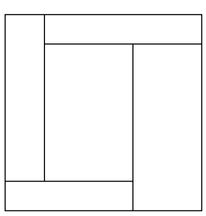
Uwagi końcowe

W pracy *The orchard visibility problem and some variants* (Journal of Computer and System Sciences, 74 (2008), 587–597) Clyde P. Kruskal rozpatrzył problem sadu bez prześwitów w przypadku, gdy promień sadu nie jest liczbą całkowitą. W pracy tej pojawiają się również pytania dotyczące sadów i drzew rosnących w punktach sieciowych dla regularnych sieci trójkątnych i sześciokątnych.

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1645. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ istnieją nieparzyste liczby x_n, y_n spełniające równanie $7x_n^2+y_n^2=2^n$.
Rozwiązanie na str. 16



M 1646. Kwadrat podzielono liniami równoległymi do jego boków na 5 prostokątów, jak na rysunku obok. Udowodnić, że jeśli zewnętrzne prostokąty mają równe pola, to wewnętrzny prostokąt jest kwadratem.
Rozwiązanie na str. 1

M 1647. Niech $P(x)$ będzie wielomianem n-tego stopnia ($n\geqslant 5$) o współczynnikach całkowitych, mającym n różnych pierwiastków całkowitych. Załóżmy, że 0 jest jednym z jego pierwiastków. Udowodnić, że wielomian $P(P(x))$ również ma dokładnie n różnych pierwiastków całkowitych.
Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1005. Jak szybko temperatura powietrza maleje z wysokością nad powierzchnią Ziemi w pogodny, suchy i bezwietrzny dzień? Średnia masa molowa powietrza $\mu=28{,}96$ g, przyspieszenie ziemskie $g=9{,}81$ m/s^2, stała gazowa $R=8{,}314$ J/(mol $\cdot$ K). W rozważanych warunkach powietrze spełnia równanie stanu gazu doskonałego.
Rozwiązanie na str. 10

F 1006. W „oku cyklonu” ciśnienie powietrza spada znacznie poniżej normalnego ciśnienia atmosferycznego $p_0=1013$ hPa, ale panuje tam przeważnie spokojna, bezwietrzna pogoda. Na zewnątrz tego obszaru, w promieniu do kilkuset kilometrów, wieją bardzo gwałtowne wiatry. Oko cyklonu Wilma w październiku 2005 roku miało promień około 2 km, panowało w nim ciśnienie 882 hPa, a silne wiatry występowały do 260 km od centrum. Oszacuj prędkość wiatru wokół oka tego cyklonu. Przyjmij, że gęstość powietrza $\rho=1{,}2$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 18