Wielościany w wielościanach, czyli matematyka eksperymentalna

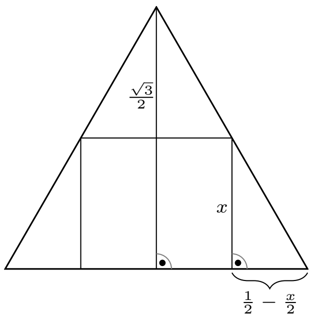
*Michał ADAMASZEK**

* Mosek ApS, Kopenhaga

Czy istnieje coś takiego jak matematyka eksperymentalna? Zobaczmy. Ten tekst zaczniemy od prostego zadania z geometrii, następnie użyjemy komputera, aby rozwiązać je w przybliżeniu, a na koniec z tego przybliżenia zgadniemy dokładny wynik. Będzie też wiele szczegółów do uzupełnienia dla Czytelników. Programy użyte do eksperymentów można znaleźć w [3].

Zadanie z geometrii

Zadanie „Kwadrat w Trójkącie". W trójkącie równobocznym zawarty jest kwadrat o największym możliwym polu. Jaką część pola trójkąta zajmuje ten kwadrat?



Rys. 1

Rozwiązanie. Najpierw musimy uzasadnić, że optymalna konfiguracja wygląda tak jak na rysunku 1, z jednym bokiem kwadratu leżącym na boku trójkąta. Ten żmudny fragment pozostawiamy Czytelnikom, tym bardziej że wkrótce podamy inne, dosyć przekonujące uzasadnienie. Reszta to elementarna geometria. Zakładając, że duży trójkąt ma bok długości 1, mamy:

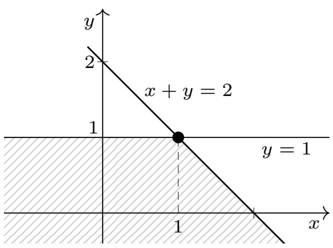
$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

a stąd $x = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0{,}46410161513$, czyli stosunek pola kwadratu do pola trójkąta wynosi

$$\frac{x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 28\sqrt{3} - 48 \approx 0{,}497422611.$$

Skoro tak dobrze nam poszło, możemy zwiększyć odrobinę stopień trudności:

Zadanie „Sześcian w Dwudziestościanie". W dwudziestościanie foremnym zawarty jest sześcian o największej możliwej objętości. Jaką część objętości dwudziestościanu zajmuje ten sześcian?



Rys. 2

Za szybko? W takim razie wróćmy do podstaw i spróbujmy powoli uogólnić nasz oryginalny problem w dwóch wymiarach. Kolejnymi kandydatami na uogólnienia są zadania o „Kwadracie w Kwadracie" (mhm...), „Kwadracie w Pięciokącie foremnym" i tak dalej. Moglibyśmy też zapytać o dowolny „N-kąt foremny w M-kącie foremnym". W przypadku najbardziej ogólnego płaskiego problemu:

Zadanie „P w Q". W danym wielokącie wypukłym Q zawarty jest wielokąt o największym możliwym polu, podobny do danego wielokąta wypukłego P. Jaką część pola Q zajmuje ten wielokąt?

Możemy już chyba tylko pomarzyć o eleganckim rozwiązaniu i zdać się na komputer. W ten właśnie sposób dochodzimy do pytania: jak wyrazić nasze zadania w języku zrozumiałym dla komputera?

Programowanie liniowe

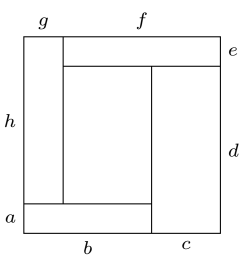
Programowanie liniowe pojawiało się niejednokrotnie w *Delcie* (np.: Kiljan Δ^3_{18}, Adamaszek Δ^2_{19}, Kowalik Δ^8_{13}, Δ^2_{20}, Wójcik Δ^2_{18}). W szkole uczymy się o układach równań liniowych i sposobach ich rozwiązywania. *Problem liniowy* dopuszcza bardziej ogólnie ograniczenia w postaci *równań i nierówności* liniowych. Taki układ może mieć zero, jedno lub wiele rozwiązań, a zadaniem *programowania liniowego* jest znalezienie takiego rozwiązania, które maksymalizuje zadaną funkcję liniową danych zmiennych.

Dla przykładu rozważmy problem liniowy:

$$\begin{array}{ll} \text{zmaksymalizuj} & 2x + 3y \\ \text{przy założeniach} & x + y \leqslant 2, \\ & y \leqslant 1. \end{array}$$

Zbiór punktów spełniających założenia tego problemu jest pokazany na rysunku 2. Łatwo sprawdzić, że w tym zbiorze wyrażenie $2x + 3y$ przyjmuje największą wartość 5 w punkcie $(x, y) = (1, 1)$, a więc ten punkt jest rozwiązaniem (w tym przypadku jedynym). Problemy liniowe pojawiają się w wielu praktycznych zastosowaniach i, co ważne, można je efektywnie rozwiązywać na komputerze.

Rozwiązanie zadania M 1646.

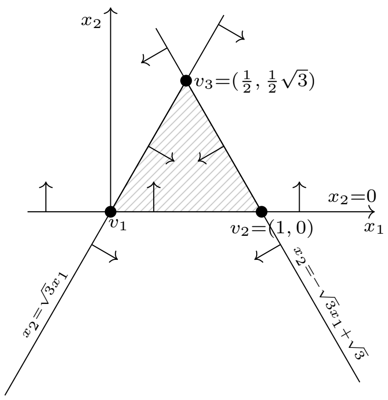


Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Załóżmy, że bok kwadratu ma długość 1, i przypuśćmy, że $a + b < 1$. Ponieważ $b + c = 1$, mamy $a < c$. Jednocześnie $ab = cd$, zatem $b > d$. Skoro jednak $b + c = d + e$, musi być $c < e$. Analogicznie wnioskujemy stąd kolejno $d > f$, $e < g$, $f > h$, $g < a$ i $h > b$. Mamy zatem $b > d > f > h > b$, sprzeczność. Podobnie wykluczamy przypadek $a + b > 1$, zatem $a + b = 1$, więc $a = c = e = g$, skąd już w prosty sposób wnioskujemy, że środkowy prostokąt jest kwadratem.

Procedury do *programowania liniowego* można znaleźć w większości popularnych pakietów do obliczeń numerycznych, a wyspecjalizowane programy rozwiązują z dużą dokładnością problemy liniowe z milionami zmiennych i ograniczeń.

Wyrazimy teraz zadanie o „Kwadracie w Trójkącie” w tym języku. Ustalmy trójkąt T o wierzchołkach $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (1,0)$, $v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (rys. 3). Po pierwsze zauważamy, że w języku problemów liniowych możemy opisać postulat „punkt $x = (x_1, x_2)$ należy do T”. Rzeczywiście, są na to nawet dwa sposoby. W sposobie pierwszym wyrażamy fakt, iż punkt (x_1, x_2) leży po właściwej stronie każdej z prostych zawierających boki trójkąta:

$$(x_1, x_2) \in T \iff \begin{array}{l} x_2 \leqslant \sqrt{3}x_1, \\ x_2 \geqslant 0, \\ x_2 \leqslant -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}. \end{array}$$

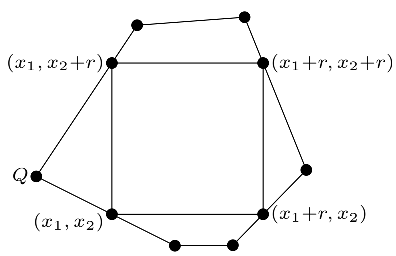


Rys. 3

Jeżeli nie chcemy pracowicie wyznaczać równań boków trójkąta, możemy użyć innego sposobu. Zapiszemy w nim, że punkt x należy do otoczki wypukłej wierzchołków trójkąta:

$$x \in T \iff \begin{array}{l} x = t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3, \\ t_1 + t_2 + t_3 = 1, \\ t_1, t_2, t_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Ponieważ współrzędne punktów v_i uważamy za stałe, powyższe zależności są liniowe w zmiennych x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, a więc również definiują problem liniowy. Zauważamy też, że obydwa sposoby nadają się do opisania zupełnie dowolnego wielokąta wypukłego Q (Dlaczego tylko wypukłego?). Jedyne, czego potrzebujemy, to współrzędne wierzchołków Q lub równania prostych zawierających boki Q.

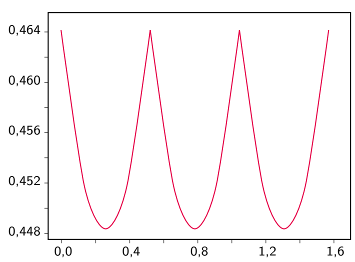


Rys. 4

Potrafimy już zapisać przynależność jednego punktu do ustalonego wielokąta wypukłego Q. Teraz możemy wreszcie wyrazić zadanie „Kwadrat w Q”. Gdyby interesowały nas tylko kwadraty o bokach równoległych do osi współrzędnych, to ułożylibyśmy problem liniowy:

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{ll} \text{zmaksymalizuj} & r \\ \text{przy założeniach} & (x_1, x_2) \in Q, \\ & (x_1 + r, x_2) \in Q, \\ & (x_1, x_2 + r) \in Q, \\ & (x_1 + r, x_2 + r) \in Q. \end{array}$$

Faktycznie, jeśli (x_1, x_2) jest lewym dolnym wierzchołkiem szukanego kwadratu, zaś r jest długością boku (rys. 4), to cztery podane założenia wyrażają przynależność wszystkich czterech wierzchołków kwadratu do wielokąta Q. Optymalne rozwiązanie tego problemu liniowego maksymalizuje długość boku r, a zatem i pole kwadratu.



Rys. 5

Jeżeli teraz uwzględnimy w jakiś sposób wszystkie możliwe obroty kwadratu wewnątrz wielokąta, to zadanie będzie rozwiązane! Jesteśmy już bardzo blisko. Dla $\alpha \in [0, \pi/2)$ oznaczmy przez Q_α wielokąt Q obrócony na płaszczyźnie o kąt α. Jeżeli wielokąt Q był dany np. poprzez współrzędne wierzchołków, to możemy bardzo łatwo obliczyć wierzchołki wielokąta Q_α i zapisać problem liniowy:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ll} \text{zmaksymalizuj} & r \\ \text{przy założeniach} & (x_1, x_2) \in Q_\alpha, \\ & (x_1 + r, x_2) \in Q_\alpha, \\ & (x_1, x_2 + r) \in Q_\alpha, \\ & (x_1 + r, x_2 + r) \in Q_\alpha. \end{array}$$

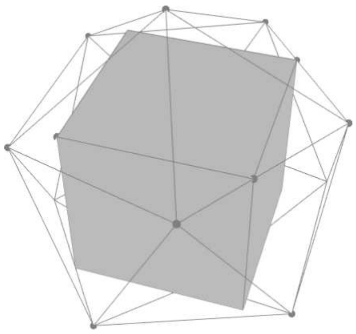
Oznaczmy rozwiązanie problemu (2) przez r_α. Jest to długość boku największego kwadratu o bokach równoległych do osi, zawartego w Q_α, a więc i długość boku największego kwadratu zawartego w Q i pochylonego pod kątem $-\alpha$. W takim razie $r = \max\{r_\alpha \ : \ \alpha \in [0, \pi/2)\}$ wyznacza długość boku kwadratu, który rozwiązuje zadanie „Kwadrat w Q”. (Dlaczego wystarczy ograniczyć się do $\alpha \leqslant \pi/2$?)

Eksperymenty

Oczywiście w praktyce nie możemy rozwiązać problemu (2) dla *wszystkich* wartości α, ale możemy wziąć ich wystarczająco wiele, aby naszkicować wykres funkcji r_α i przybliżyć maksimum z dużą dokładnością. Wróćmy do zadania „Kwadrat w Trójkącie”, od którego zaczęliśmy ten tekst. Wykres r_α dla tego problemu znajduje się na rysunku 5. Odczytujemy z niego, że maksimum przypada dla obrotu o $\alpha = 0$ (oraz, oczywiście!, $\alpha \in \{\pi/6, \pi/3\}$), tak jak początkowo przypuszczaliśmy. Otrzymujemy też przybliżoną wartość $r_0 \approx 0{,}464101616$, która zgadza się z dokładnym wynikiem do 8. miejsca po przecinku. Jako eksperymentatorzy, jesteśmy usatysfakcjonowani zgodnością teorii z praktyką.

Rozwiązanie zadania M 1647.
Niech $P(x) = Cx(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$, gdzie $C, x_1, \dots x_{n-1}$ są liczbami całkowitymi. Oczywiście $P(P(x_i)) = 0$ dla $0 \leqslant i \leqslant n-1$ (przyjmujemy $x_0 = 0$). Załóżmy, że $P(P(a)) = 0$ dla pewnego $a \neq x_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Wówczas $P(a) = x_k$ dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant n-1$, czyli $Ca(a - x_1)\dots(a - x_{n-1}) = x_k$. W tej sytuacji $a(x_k - a)$ dzieli x_k. Załóżmy, że $x_k > 0$. Z podzielności $a(x_k - a) \mid x_k$ wnioskujemy kolejno $0 < a < x_k$ oraz $a = x_k - a = 1$, czyli $x_k = 2$. Jednak $x_k = 2$ ma tylko 4 różne dzielniki całkowite, co przeczy równości $P(a) = x_k$. Przypadek $x_k < 0$ rozpatrujemy podobnie i w ten sposób kończymy dowód, że tylko pierwiastki wielomianu $P(x)$ są całkowitymi pierwiastkami wielomianu $P(P(x))$, co dopełnia rozwiązanie.

Przejdźmy do zadania „Sześcian w Dwudziestościanie”. Wprawdzie rozważania w tekście prowadziliśmy na płaszczyźnie, ale wszystko można powtórzyć w trzech wymiarach z nieznacznymi zmianami. W problemie (2) zamiast czterech wierzchołków kwadratu musimy uwzględnić osiem wierzchołków sześcianu, a zamiast Q_α musimy rozważyć wszystkie obroty $Q_{\alpha,\beta,\gamma}$ oryginalnej bryły Q w trzech wymiarach. Po tych poprawkach wciąż mamy serię problemów liniowych obliczających poszczególne wartości $r_{\alpha,\beta,\gamma}$.



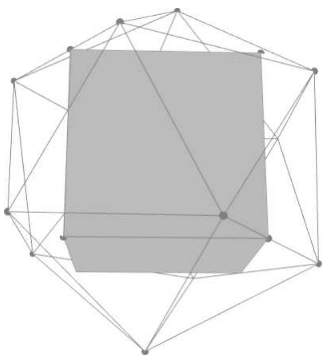
Rys. 6

Wierzchołki dwudziestościanu foremnego możemy odszukać w literaturze. Przy oznaczeniu $\tau = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$ następujące punkty

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(0, \tfrac{1}{2}, \tau\right), & v_2 &= \left(0, -\tfrac{1}{2}, \tau\right), & v_3 &= \left(\tfrac{1}{2}, \tau, 0\right), \\ v_4 &= \left(\tfrac{1}{2}, -\tau, 0\right), & v_5 &= \left(\tau, 0, \tfrac{1}{2}\right), & v_6 &= \left(\tau, 0, -\tfrac{1}{2}\right), \\ v_7 &= \left(-\tfrac{1}{2}, \tau, 0\right), & v_8 &= \left(-\tfrac{1}{2}, -\tau, 0\right), & v_9 &= \left(-\tau, 0, \tfrac{1}{2}\right), \\ v_{10} &= \left(0, \tfrac{1}{2}, -\tau\right), & v_{11} &= \left(0, -\tfrac{1}{2}, -\tau\right), & v_{12} &= \left(-\tau, 0, -\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

stanowią wierzchołki dwudziestościanu foremnego D o krawędzi długości 1 i objętości $\frac{5}{12}\sqrt{5} + \frac{5}{4}$. Implementujemy więc trójwymiarową wersję problemu liniowego (2), rozwiązujemy ją w pętli dla kilkuset wartości $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$ i... czekamy. Po dłuższym czasie otrzymujemy wynik: krawędź sześcianu ma długość w przybliżeniu

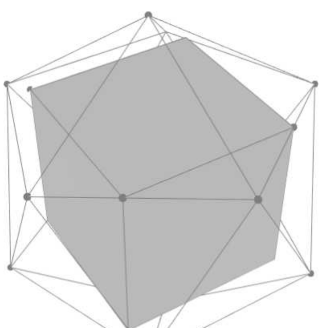
$$0{,}93869735489196. \tag{3}$$



Rys. 7

Otrzymujemy także kąty obrotu dające maksymalny sześcian. Możemy to wszystko narysować. Kilka rzutów największego sześcianu wpisanego w dwudziestościan zostało przedstawionych na rysunkach 6–8.

Tak jak poprzednio, domyślamy się, że wynik uzyskany za pomocą komputera nie jest dokładny i że optymalna konfiguracja jakościowo wygląda następująco: dwa wierzchołki A, B sześcianu leżą symetrycznie na dwóch sąsiednich krawędziach dwudziestościanu, dwa inne wierzchołki C, D na antypodycznych krawędziach, a pozostałe leżą wewnątrz ścian dwudziestościanu. Czy możemy stąd pokusić się o obliczenie dokładnych wartości? Otóż tak (rys. 9). Najpierw znajdujemy końce krawędzi dwudziestościanu, na których leżą punkty A i B. Okazuje się, że bez straty ogólności można w tym celu wybrać v_1, v_2, v_3, które są w pozycji pokazanej na rysunku. Będziemy zakładać, że



Rys. 8

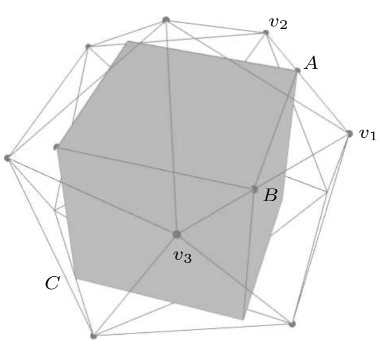
$$A = tv_1 + (1-t)v_2, \quad B = tv_1 + (1-t)v_3, \quad C = -A, \; D = -B,$$

dla pewnego $t \in (0,1)$. Jak znaleźć t, dla którego punkty A, B, C, D są wierzchołkami sześcianu? Jest wiele sposobów, na przykład spełnione musi być równanie

$$|AC| = \sqrt{3}|AB|.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów A, B, C, v_1, v_2 dostajemy równanie kwadratowe w zmiennej t, które po nieco uciążliwych przekształceniach (może je wykonać za nas komputer, np. pakiet SAGE), przyjmuje postać:

$$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)t^2 + (3\sqrt{5} + 5)t - (\sqrt{5} + 2) = 0.$$



Rys. 9

Pierwiastkiem tego równania w przedziale $(0,1)$ jest $t = (\sqrt{5} + 7)/22$. Stąd możemy obliczyć dokładne współrzędne punktów A i B, a ostatecznie też długość krawędzi sześcianu

$$|AB| = \frac{7\sqrt{5} + 5}{22} \approx 0{,}93874890$$

(porównaj z (3)) i stosunek objętości sześcianu do dwudziestościanu:

$$\frac{|AB|^3}{5/12\sqrt{5} + 5/4} = \frac{219\sqrt{5} + 15}{1331} \approx 0{,}3791877.$$

Reasumując: przybliżenie uzyskane przy użyciu programowania liniowego okazało się wystarczająco dobre, aby odgadnąć dokładny wynik. Czy to rozumowanie jest pełnym dowodem? Niekoniecznie, ale niedaleko mu do dowodu [1]. Czy to rozumowanie stanowi przekonujące rozwiązanie? Raczej tak. Czy istnieje coś takiego jak matematyka eksperymentalna? Zdecydowanie!

Więcej o zawieraniu dowolnych wielościanów foremnych w innych wielościanach i o historii problemu można poczytać w [1] i [2]. Do dalszych eksperymentów w tym zakresie można użyć programów z [3].

Literatura

[1] Moritz Firsching, *Computing maximal copies of polytopes contained in a polytope*, Experimental Mathematics Vol. 24 (2015), Issue 1, pp. 98-105

[2] `https://mathoverflow.net/questions/138229/on-maximal-regular-polyhedra-inscribed-in-a-regular-polyhedron/154007`

[3] `https://github.com/aszek/Delta/tree/master/polytopes`