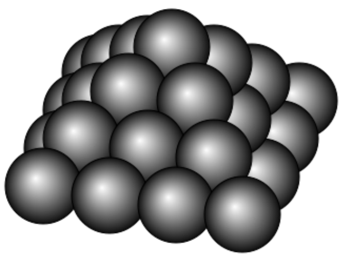
Piramida kwadratowych liczb

*Maria GAŁUSZKA**

* Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Piramidy w starożytnym Egipcie budowano na kształt ostrosłupa prawidłowego o podstawie kwadratu. Jak pokazują źródła historyczne, starożytni Egipcjanie potrafili obliczyć objętość takiego ostrosłupa. Jednak ich dobrze rozwinięta, jak na tamte czasy, matematyka, miała głównie zastosowanie praktyczne i raczej nikt nie formułował pytań, które miałyby na celu jedynie matematyczną rozrywkę. Jednym z matematyków, który szczególnie interesował się rozrywkowymi zastosowaniami królowej nauk, był Édouard Lucas, autor między innymi słynnej gry zwanej Wieżą Hanoi. W niniejszym artykule zwrócimy uwagę na sformułowany przez Lucasa problem z gatunku tych raczej mało praktycznych. Jak zobaczymy, ma on pewien związek z piramidami.



Wyobraźmy sobie piramidę o podstawie kwadratu utworzoną z jednakowych kul. W 1875 roku Édouard Lucas rzucił wyzwanie czytelnikom pewnego czasopisma matematycznego (nie była to *Delta* – przyp. red.), formułując

Zadanie. *Udowodnić, że piramida o podstawie kwadratu ułożona z kul armatnich składa się z kwadratowej liczby kul wtedy i tylko wtedy, gdy bok jej podstawy ma długość* 24 *kul.*

Problem ten można zapisać w formie równania diofantycznego
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = y^2,$$
gdzie x jest liczbą kul armatnich w rzędzie tworzącym bok kwadratu będącego podstawą piramidy, a y^2 sumą wszystkich kul składających się na piramidę. Posługując się wzorem na sumę kwadratów pierwszych kolejnych liczb naturalnych, powyższe równanie możemy również zapisać w sposób równoważny jako
$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2.$$
Lucas postawił poniższą hipotezę.

Hipoteza: *Jedynymi parami liczb naturalnych spełniającymi równanie*
$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2$$
są $x = 1,\ y = 1$ *oraz* $x = 24, y = 70$.

Okazała się ona prawdziwa, jednak początkowe próby jej udowodnienia były nieskuteczne. Sam autor również opublikował rzekomy dowód, jednak zawierał on lukę, której przez długi czas nikomu nie udało się uzupełnić. Dopiero w 1918 roku George Neville Watson przedstawił pierwsze kompletne uzasadnienie hipotezy Lucasa. Było ono jednak obszerne i wykorzystywało zaawansowane narzędzia. Dopiero później pojawiły się mniej wyrafinowane dowody. W dalszej części tego artykułu przedstawimy szkic jednego z nich, który można uznać za stosunkowo prosty, gdyż opiera się na elementarnej teorii liczb.

Niech para (x, y) będzie rozwiązaniem powyższego równania. W pierwszej części dowodu załóżmy, że x jest parzyste. Pomocne będą poniższe dwa lematy, których techniczne dowody przedstawimy w szkicowej postaci.

Lemat 1. *Nie istnieje trójkąt prostokątny o bokach całkowitych, którego pole jest liczbą kwadratową.*

Szkic dowodu. Przypuśćmy, że w jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieją x, y spełniające $xy = 2w^2$ oraz $x^2 + y^2 = z^2$ dla pewnego z. Zgodnie ze znaną charakterystyką rozwiązań drugiego z tych równań możemy przyjąć $x = 2rs$, $y = r^2 - s^2$ (r, s względnie pierwsze) i wówczas $rs(r^2 - s^2) = w^2$. Ze względnej pierwszości r i s wynika $r = a^2$, $s = b^2$, $r - s = c^2$ i $r + s = d^2$, skąd $(d + c)^2 + (d - c)^2 = (2a)^2$ oraz $(d + c)(d - c) = 2b^2$. Mamy jednak $b < w$, co przeczy definicji w i kończy dowód.

Lemat 2. *Nie istnieje liczba naturalna n taka, że $2n^4 + 1$ jest liczbą kwadratową.*

Szkic dowodu. Niech (n, m) będzie rozwiązaniem równania $2n^4 + 1 = m^2$ o możliwie najmniejszej wartości n. Wówczas m jest nieparzyste i możemy przekształcić równanie

Rozwiązanie zadania F 1005.
Powierzchnia Ziemi ogrzewa atmosferę. Ogrzana „porcja” powietrza o masie m rozszerza się i wznosi pod wpływem siły wyporu, aż osiągnie wysokość Δh, na której jej gęstość zrówna się z gęstością otaczającego gazu. Ze względu na bardzo małe przewodnictwo cieplne wznosząca się „porcja” powietrza podlega przemianie adiabatycznej. Zgodnie z I zasadą termodynamiki zmiana energii wewnętrznej gazu ΔU w tej przemianie równa jest pracy sił zewnętrznych działających na gaz:
$$\Delta U = -p\Delta V,$$
gdzie p oznacza ciśnienie zewnętrzne, a ΔV zmianę objętości gazu. Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego $\Delta U = nc_V\Delta T$, gdzie $n = m/\mu$ oznacza liczbę moli gazu, c_V – jego molowe ciepło właściwe w stałej objętości, a ΔT zmianę temperatury. Na podstawie równania stanu gazu doskonałego mamy też:
$$V = \frac{nRT}{p},$$
a więc
$$p\Delta V = nR\Delta T - \frac{nRT\Delta p}{p}.$$
Z drugiej strony, w warunkach równowagi z otoczeniem – gazem o gęstości ρ, mamy $\Delta p = -g\rho\Delta h$. Dostajemy równanie:
$$n(c_V + R)\Delta T = \frac{-nRT\rho g\Delta h}{p}.$$
Po skorzystaniu z zależności $nRT/p = V$, $V/n = \mu/\rho$ oraz $c_P = c_V + R = 7R/2$ otrzymujemy warunek:
$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{-\mu g}{c_P} = \frac{-2\mu g}{7R},$$
co po podstawieniu danych liczbowych prowadzi do wniosku, że w spokojnym, suchym powietrzu spadek temperatury z wysokością wynosi 9,76 K/km $\approx$ 1 K/100 m.

do postaci $n^4 = 2m_1(m_1+1)$. Jeśli m_1 jest nieparzyste, to m_1 i $2(m_1+1)$ są względnie pierwsze, a zatem dla pewnych k, l mamy $m_1 = k^4$ i $2(m_1+1) = l^4$, skąd rozważając modulo 8, szybko otrzymujemy sprzeczność. Zatem m_1 jest parzyste i podobnie wnioskujemy $2m_1 = k^4$ i $m_1 + 1 = l^4 = u^2$. W tej sytuacji $2k_1^4 = u_1(u_1+1)$ (gdzie $k = 2k_1$, $u = 2u_1+1$). Z $l^2 = 2u_1 + 1$ wnioskujemy (modulo 4) parzystość u_1, skąd $u_1 = 2a^4$ i $u_1 + 1 = b^4$, czyli $2a^4 + 1 = (b^2)^2$, co daje nam sprzeczność z minimalnością n.

Lemat 3. Jedynymi liczbami całkowitymi k, takimi że $8k^4+1$ jest liczbą kwadratową, są $k=0$ i $k=1$.

Szkic dowodu: Przypuśćmy, że $8k^4 + 1 = l^2$. Wówczas $l = 2s+1$ i $2k^4 = s(s+1)$. Jeśli s jest parzyste, to $s = 2a^4$ i $s+1 = b^4$, a zatem $2a^4 + 1 = b^4$, skąd i z lematu 2 mamy $s = 0 = k$. Jeśli s jest nieparzyste, to $s = a^4$ i $s + 1 = 2b^4$, czyli $a^4 + 1 = 2b^4$. Wnioskujemy stąd (modulo 4), że liczby a i b są nieparzyste, ponadto podnosząc ostatnią równość do kwadratu i przekształcając, dostaniemy $(b^4 - a^2)(b^4 + a^2) = ((a^4-1)/2)^2$. Ze względnej pierwszości a i b mamy $(b^4 - a^2)/2 = c^2$ i $(b^4+a^2)/2 = d^2$, a zatem $(b^2-a)^2 + (b^2+a)^2 = (2d)^2$ i $(b^2-a)(b^2+a) = 2c^2$. Zgodnie z lematem 1 oznacza to, że $b^2 = a$ i w konsekwencji $k = 1$.

Powróćmy do hipotezy Lucasa. Skoro x jest parzyste, to x, $x+1$ i $2x+1$ są parami względnie pierwsze. Stąd $x+1, 2x+1$, jako liczby nieparzyste, są albo kwadratami, albo potrójnymi kwadratami. Zatem $x+1 \not\equiv 2 \pmod 3$ oraz $2x+1 \not\equiv 2 \pmod 3$, a stąd $x \not\equiv 1 \pmod 3$ oraz $2x \not\equiv 1 \pmod 3$, co daje również, że $x \not\equiv 2 \pmod 3$. Ostatecznie $x \equiv 0 \pmod 3$. Wobec tego liczby $x+1$ i $2x+1$ są kwadratami (gdyby były potrójnymi kwadratami, nie byłyby względnie pierwsze z x). Wtedy dla pewnych liczb naturalnych p, q, r parami względnie pierwszych możemy zapisać

$$x = 6q^2,\ x+1 = p^2,\ 2x+1 = r^2.$$

Ponadto $6q^2 = (r-p)(r+p)$, a skoro p, r są nieparzyste, to $4 \mid 6q^2$. Wtedy $2 \mid q^2$, czyli $2 \mid q$.

Ze względnej pierwszości p i r wynika względna pierwszość liczb całkowitych $\frac{r-p}{2}$ i $\frac{r+p}{2}$.

Niech s będzie liczbą całkowitą taką, że $2s = q$. Wtedy $6s^2 = \frac{r-p}{2} \cdot \frac{r+p}{2}$. Skoro $\frac{r-p}{2}$, $\frac{r+p}{2}$ są względnie pierwsze, to otrzymujemy dwie możliwości.

1) Jedna z liczb $\frac{r-p}{2}$, $\frac{r+p}{2}$ jest postaci $6A^2$, a druga B^2, gdzie A, B są nieujemne całkowite. Wtedy $p = \pm(6A^2 - B^2)$ i $q = 2AB$. Skoro jednak $6q^2 + 1 = x + 1 = p^2$, to $24A^2B^2 + 1 = (6A^2 - B^2)^2$, czyli $(6A^2 - 3B^2)^2 = 8B^4 + 1$. Korzystając z lematu 3, otrzymujemy $A = B = 1$. Stąd $x = 6q^2 = 24$.
2) Jedna z liczb $\frac{r-p}{2}$, $\frac{r+p}{2}$ jest postaci $3A^2$, a druga $2B^2$, gdzie A, B są nieujemne całkowite. Wtedy $p = \pm(3A^2 - 2B^2)$ i $q = 2AB$. Wobec równości $24A^2B^2 + 1 = (3A^2 - 2B^2)^2$ otrzymujemy, że $(3A^2 - 6B^2)^2 = 2(2B)^4 + 1$. Następnie z lematu 2 wnioskujemy, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia B spełniająca powyższe założenia. Stąd równanie $x(x+1)(2x+1) = y^2$ nie ma rozwiązań w tym przypadku.

Wykazaliśmy więc, że gdy x jest parzyste, to problem Lucasa ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 24$, $y = 70$.

Pozostaje nam sytuacja, kiedy to x jest nieparzyste. Najpierw odwołamy się do dość znanego w teorii liczb równania Pella, a właściwie do jego szczególnego przypadku, to znaczy równania $X^2 - 3Y^2 = 1$. Wiemy, że jego wszystkie rozwiązania to ciąg liczb

$$u_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n),\ v_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(a^n - b^n),$$

gdzie $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$.

Do przeprowadzenia drugiej części dowodu potrzebny będzie jeszcze jeden lemat, którego dowód również pominiemy. Bazuje on na pewnej obserwacji dotyczącej rozwiązań równania $X^2 - 3Y^2 = 1$.

Lemat 4. Niech M będzie liczbą naturalną. Wtedy $u_n = 4M^2 + 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M = 1$ oraz $n = 2$.

Dowód wspomnianego wyżej lematu również nie jest skomplikowany, jednak opiera się na kilku innych obserwacjach dotyczących własności rekurencyjnych ciągu rozwiązań równania $X^2 - 3Y^2 = 1$, których treści tutaj pominiemy, gdyż same w sobie nie są one dla nas szczególnie interesujące.

Skoro $x, x+1, 2x+1$ są parami względnie pierwsze, to x jest kwadratem albo potrójnym kwadratem i $x \not\equiv 2 \pmod 3$. Wówczas $x+1$ (parzyste) jest odpowiednio albo kwadratem pomnożonym przez 6, albo podwójnym kwadratem. Zatem $x+1 \not\equiv 1 \pmod 3$, a stąd już łatwo wywnioskować, że $x \equiv 1 \pmod 3$ i $2x+1 \equiv 0 \pmod 3$. Wtedy istnieją takie liczby naturalne p, q, r parami względnie pierwsze, że

$$x = p^2,\ x+1 = 2q^2,\ 2x+1 = 3r^2.$$

Następnie otrzymujemy, że $6r^2 + 1 = 4x + 3 = 4p^2 + 3$. Ponadto

$$(6r^2+1)^2 - 3(4qr)^2 = 12r^2(3r^2 + 1 - 4q^2) + 1 = 1.$$

Równanie to przyjęło postać szczególnego równania Pella, przy czym $6r^2 + 1 = 4p^2 + 3$ odpowiada wyrazom ciągu u_n. Korzystając z lematu 3, otrzymujemy $6r^2 + 1 = 7$, co daje nam $r = 1$, a wtedy $x = 1$. Uzyskaliśmy drugie rozwiązanie problemu Lucasa. Tym samym zakończyliśmy dowód jego hipotezy.

Wiele informacji zawartych w tym tekście zaczerpnęłam z artykułu W.S. Anglina *The Square Pyramid Puzzle*, The American Mathematical Monthly Vol. 97, No. 2 (Feb., 1990), pp. 120-124.

Rozważając powyższe piramidy, można zadać sobie również pytanie, kiedy suma kul jest liczbą trójkątną, czyli poszukać rozwiązań równania diofantycznego

$$x(x+1)(2x+1) = 3y(y+1).$$

Na to również są znane wyniki. Aby dostarczyć sobie matematycznej rozrywki, czemu by nie zadać innego warunku dla liczby będącej sumą kul? Jeśli tylko mamy do czynienia z pewnym ciągiem liczb, którego jawny wzór jest nam znany, to cała zabawa sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego równania diofantycznego. Tym samym zachęcam Cię, drogi Czytelniku, do sformułowania podobnego problemu.