# Klub 44 F

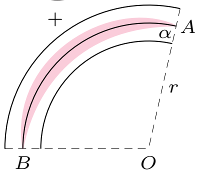
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

## Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

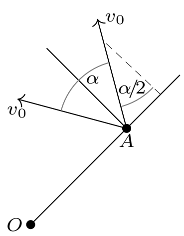
Przypominamy treść zadań:

**696.** Z punktu $A$ kondensatora cylindrycznego wylatuje lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich. Kąt rozwarcia wiązki wynosi $\alpha$ (rys. 1, 2). Wszystkie jony w wiązce mają taką samą energię. Jony, których prędkość w punkcie $A$ jest prostopadła do odcinka $OA$, poruszają się po okręgu o promieniu $r_0 = |OA|$, współśrodkowym z okładkami kondensatora. Wykazać, że wiązka jonów ponownie zogniskuje się w pewnym punkcie $B$, i znaleźć kąt $AOB$. Wyznaczyć maksymalną szerokość wiązki.

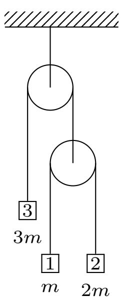
**697.** W układzie przedstawionym na rysunku 3 oba bloczki nie obracają się, a nitki mogą ślizgać się po nich bez tarcia. Bloczek ruchomy jest nieważki, masy ciężarków są dane. Znaleźć przyspieszenie ciężarka o masie $3m$.




Rys. 1




Rys. 2




Rys. 3

**696.** Linie pola elektrycznego w kondensatorze cylindrycznym skierowane są wzdłuż promieni okładek i w rozważanym przypadku mają zwrot do punktu $O$. Z prawa Gaussa wartość natężenia pola $E = b/r$, gdzie $r$ jest odległością od punktu $O$, $b$ stałą proporcjonalności. Przyspieszenie dośrodkowe jonu poruszającego się po orbicie o promieniu $r_0$ wywołane jest siłą $F = qb/r_0 = m\omega_0^2 r_0$, stąd prędkość kątowa jonu $\omega_0 = \sqrt{qb/(mr_0^2)}$.

Na jon odległy o $r_0 + x$ od środka okręgu O działa w układzie wirującym wokół osi kondensatora siła

$$F_x = -\frac{qb}{r_0 + x} + m\omega^2 (r_0 + x),$$

gdzie $\omega$ jest prędkością kątową jonu i możemy ją otrzymać z zasady zachowania momentu pędu:

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega (r_0 + x)^2, \quad \omega = \omega_0 r_0^2/(r_0 + x)^2.$$

Stąd

$$F_x = -\frac{bq\left(2r_0 x + x^2\right)}{(r_0 + x)^3}.$$

Dla $x \ll r_0$

$$F_x = -\frac{2bq}{r_0^2} x = -kx.$$

Jony, których prędkość w punkcie $A$ tworzy mały kąt z prędkością jonów na podstawowej orbicie, wykonują radialne drgania harmoniczne o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{mr_0^2/(2bq)},$$

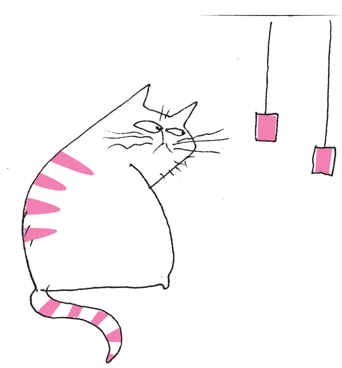
który jest jednakowy dla wszystkich jonów. Po czasie $T/2$ wszystkie jony, które wystartowały w punkcie $A$, spotkają się w jednym punkcie $B$ orbity podstawowej. Szukany kąt $AOB$ ma wartość $\varphi = \omega_0 T/2 = \pi/\sqrt{2}$ .

Związek między amplitudą drgań w ruchu harmonicznym i maksymalną prędkością ma postać: $x_{\max} = v_{\max} T/(2\pi)$. W naszym przypadku

$$v_{\max} = \omega_0 r_0 \sin\alpha/2 \approx \omega_0 r_0 \alpha/2.$$

Maksymalna szerokość wiązki jonów

$$d = 2x_{\max} = r_0\alpha/\sqrt{2}.$$



**697.** Ciężarki 1 i 2, o łącznej masie $3m$, ślizgają się po ruchomym bloczku, zatem naprężenie $N$ nici, na której zawieszony jest ten bloczek, jest mniejsze od $3mg$. Ciężarek 3 porusza się w dół, a jego równanie ruchu ma postać $3ma = 3mg - N$, gdzie $a$ jest szukanym przyspieszeniem.

Ponieważ bloczek ruchomy jest nieważki, naprężenie $N_1$ nici, na której zawieszone są ciężarki 1 i 2, równe jest połowie naprężenia górnej nici: $N_1 = N/2$.

Oznaczmy przez $a_1$ przyspieszenia ciężarków 1 i 2 w układzie nieinercjalnym związanym z ruchomym bloczkiem. Równanie ruchu układu obu ciężarków ma postać

$$3ma_1 = m(g + a),$$

równanie ruchu ciężarka pierwszego

$$ma_1 = N/2 - mg - ma.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wynik:

$$a = g/17.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 686 ($WT = 3{,}23$) i 687 ($WT = 2{,}4$) z numeru 11/2019

| | | |
|---|---|---|
| Tomasz Rudny | Poznań | 41,38 |
| Michał Koźlik | Gliwice | 39,70 |
| Paweł Perkowski | Ożarów | 36,18 |
| Krzysztof Magiera | Łosiów | 32,62 |
| Jacek Konieczny | Poznań | 29,80 |
| Ryszard Woźniak | Kraków | 28,77 |
| Aleksander Surma | Myszków | 27,75 |
| Mateusz Kapusta | Wrocław | 25,37 |
| Sławomir Buć | Mystków | 22,22 |

# Klub 44 M

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

Przypominamy treść zadań:

**799.** Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

**800.** Dla ustalonych liczb dodatnich $a, b$ określamy funkcję $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{a}{x}+1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x}+1\right)\right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $L = L(a,b) > 0$, dla której $f(L) = 1$, i że $\min\{a,b\} \leqslant L(a,b) \leqslant \max\{a,b\}$; zatem liczba $L(a,b)$ może być uważana za pewną średnią liczb $a, b$.
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$ między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb $a, b$?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 793 ($WT = 1{,}62$) i 794 ($WT = 2{,}50$) z numeru 1/2020

| | | |
|---|---|---|
| Janusz Fiett | Warszawa | 43,82 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 41,28 |
| Łukasz Merta | Kraków | 40,14 |
| Zbigniew Skalik | Wrocław | 40,04 |
| Błażej Żmija | Kraków | 39,73 |
| Michał Adamaszek | Kopenhaga | 39,02 |
| Paweł Burdzy | Warszawa | 38,82 |
| Jakub Węgrecki | Kraków | 37,06 |
| Marek Spychała | Warszawa | 36,69 |
| Andrzej Kurach | Ryjewo | 36,30 |

Widać, że w bliskim czasie czeka nas ogromny wysyp czterdziestoczwórek.

**799.** Jest to możliwe. Przedstawimy jedną z możliwych konstrukcji.

Niech $a$ będzie dowolną dodatnią liczbą nieparzystą. Spójrzmy na ciąg

$$a \to 2a \Longrightarrow a+1 \to 2a+2 \to 2a+4 \to a+2 \Longrightarrow 2a+5,$$

w którym pojedyncza strzałka oznacza jedną z dopuszczalnych operacji ($x+2$, $x-2$, $x \cdot 2$, $x/2$), zaś podwójna strzałka ($\Rightarrow$) oznacza wielokrotne dodanie lub odjęcie dwójki, przebiegające monotonicznie przez wszystkie liczby tej samej parzystości, co liczby połączone tą podwójną strzałką. Na przykład dla $a = 7$ mamy ciąg

$$7 \to \overbrace{14 \to 12 \to 10 \to 8}^{\Longrightarrow} \to 16 \to 18 \to \underbrace{9 \to 11 \to 13 \to 15 \to 17 \to 19}_{\Longrightarrow}$$

(jedynie dla $a = 1$ strzałka $2a \Rightarrow a+1$, czyli $2 \Rightarrow 2$ jest „pusta"). W tak określonym ciągu występują wszystkie liczby naturalne z przedziału $[a, 2a+5]$, każda jednorazowo.

Wystarczy teraz określić liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 5$ i zastosować podaną konstrukcję w każdym z przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$.

**800.** Funkcja $f$ jest ciągła i rosnąca, a jej granice przy końcach dziedziny $(0,\infty)$ wynoszą 0 oraz e. Zatem liczba $L = L(a,b)$, dla której $f(L) = 1$, jest jednoznacznie określona. Wykażemy, że $H \leqslant L \leqslant G$ (gdzie $H = \frac{2ab}{a+b}$, $G = \sqrt{ab}$); stąd też wyniknie, że $L$ leży pomiędzy $a$ i $b$. Wobec ścisłej monotoniczności funkcji $f$ wystarczy dowieść, że $f(H) \leqslant 1 \leqslant f(G)$.

Niech $g(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ dla $x > 0$; jest to funkcja rosnąca. Skoro $H = \frac{2ab}{a+b}$, zatem

(1) $f(H) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}\big(g(u)+g(v)\big)$, gdzie $u = \dfrac{2a}{a+b}$, $v = \dfrac{2b}{a+b}$;

$u + v = 2$. Badając znak $g''(x)$, stwierdzamy, że funkcja $g$ jest wklęsła w przedziale $[\frac{1}{2}, \infty)$. Jeżeli więc liczby $u, v$ leżą w tym przedziale, to $g(u)+g(v) \leqslant 2g\big(\frac{u+v}{2}\big) = 2/\mathrm{e}$. Jeśli zaś np. $u < \frac{1}{2}$, rozważamy dwa podprzypadki (pamiętając, że $v = 2 - u$):

gdy $\frac{1}{3} \leqslant u < \frac{1}{2}$ : $g(u)+g(v) < g\big(\frac{1}{2}\big) + g\big(\frac{5}{3}\big) = \mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-3/5}$;

gdy $0 < u < \frac{1}{3}$ : $g(u)+g(v) < g\big(\frac{1}{3}\big) + g\big(2\big) = \mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-1/2}$;

we wszystkich przypadkach uzyskane wartości nie przekraczają $2/\mathrm{e}$. Otrzymane oszacowanie $g(u)+g(v) \leqslant 2/\mathrm{e}$ pokazuje (zgodnie ze wzorem (1)), że $f(H) \leqslant 1$.

Pozostało do wykazania, że $f(G) \geqslant 1$; do tego użyjemy funkcji $h(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1/x}$, bowiem

$$f(G) = f\Big(\sqrt{ab}\Big) = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot h\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right). \qquad (2)$$

Nietrudno się przekonać, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność $h'(x) > 0$, czyli $\mathrm{e}^{-1/x} > x^2\mathrm{e}^{-x}$, równoważna (przez logarytmowanie) nierówności $-1/x > 2\ln x - x$; tę ostatnią nierówność sprawdzamy bez trudu, przenosząc wszystko na jedną stronę i ponownie różniczkując. Zatem istotnie $h'(x) > 0$ dla $x > 1$; stąd $h(x) \geqslant h(1) = 2/\mathrm{e}$ dla $x \geqslant 1$. Ponieważ bez straty ogólności można przyjąć, że $a \geqslant b$, ze wzoru (2) wnosimy, że $f(G) \geqslant 1$. To kończy rozwiązanie.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.