KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO * OLIMPIJCZYKA * 19

U(nie)jednorodnianie nierówności

Bartłomiej BZDĘGA

W całym artykule stosujemy oznaczenia $X = (x_1, \ldots, x_n)$ oraz $aX = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$. Będziemy pisać $F(X)$ dla oznaczenia wyrażenia, w którym występują zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zbiór $\mathbb{R}_+^n$ stanowią te X, w których $x_1, \ldots, x_n > 0$.

Stopniem jednomianu $J(X) = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ nazywamy liczbę $d = k_1 + \ldots + k_n$. Równość $J(aX) = a^d J(X)$ jest podstawą do uogólnienia pojęcia stopnia: jeśli istnieje takie d, że dla każdego $a > 0$ zachodzi równość $F(aX) = a^d F(X)$, to wyrażenie F nazywamy *jednorodnym*, a liczbę d – jego *stopniem*. Zauważmy, że dla każdego d możemy powiedzieć, że wyrażenie zerowe ma stopień d.

Nierówność $\mathcal{N}(X)$, w której występują zmienne $x_1, \ldots, x_n$, nazywamy jednorodną, jeśli obie jej strony są wyrażeniami jednorodnymi tego samego stopnia.

Załóżmy, że nierówność $\mathcal{N}(X)$ jest pod pewnym warunkiem $\mathcal{W}$ równoważna jednorodnej nierówności $\mathcal{N}^*(X)$, przy czym warunek $\mathcal{W}$ ma postać $F_1(X) = F_2(X)$, w której F_1 i F_2 są jednorodnymi wyrażeniami różnych stopni, które przyjmują wyłącznie dodatnie wartości. Jest wówczas jasne, że jeśli $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$, to $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek $\mathcal{W}$.

Takie postępowanie spotykamy dość często – za pomocą danego warunku $\mathcal{W}$ ujednorodniamy nierówność po to, by ją wykazać w postaci jednorodnej. Dzięki powyższemu twierdzeniu ten ostatni krok można wykonać już bez korzystania z warunku $\mathcal{W}$. Taką metodą rozwiązujemy zadania 1–4, a także zadanie 5 z kącika nr 5.

Mniej oczywiste i dość zaskakujące jest to, że ta implikacja działa również w drugą stronę: jeśli $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek $\mathcal{W}$, to $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$.
Dla dowodu ustalmy dowolne $X \in \mathbb{R}_+^n$ oraz połóżmy $r = F_1(X)/F_2(X)$ i $a = r^{1/(d_2-d_1)}$ (d_1 i d_2 są stopniami odpowiednio F_1 i F_2). Otrzymujemy wtedy równości

$$F_1(aX) = a^{d_1} F_1(X) = a^{d_1} r F_2(X) = a^{d_1} r a^{-d_2} F_2(aX) = F_2(aX),$$

czyli zachodzi warunek $\mathcal{W}$. Z tego wynika, że nierówności $\mathcal{N}(aX)$, $\mathcal{N}^*(aX)$ i $\mathcal{N}^*(X)$ są równoważne, co kończy dowód wobec dowolności X.

Konsekwencją tego faktu jest to, że przy dowodzeniu nierówności jednorodnej dodatnich zmiennych możemy dodatkowo przyjąć dowolny warunek $\mathcal{W}$ mający wyżej opisaną postać. Można to poćwiczyć na zadaniach 5–7.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają warunek $abc = a + b + c$, to $ab + bc + ca \geqslant 9$.
2. Liczby dodatnie a, b i c spełniają równość $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że
$$\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2+c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2+a^2}{ca(c+a)} \geqslant 1.$$
3. Liczby dodatnie a, b i c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Dowieść, że
$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leqslant 2.$$
4. Udowodnić, że jeśli iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1, to $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$.
5. Wykazać, że dla $a, b, c > 0$ prawdziwa jest nierówność
$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2a+b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b+c}} \geqslant 1.$$
6. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność
$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}.$$
7. Dowieść, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność
$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geqslant \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right) \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Wskazówki do zadań

1. Po ujednorodnieniu otrzymamy $(ab+bc+ca)(a+b+c) \geqslant 9abc$, co się sprowadza do nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną.

2. W celu ujednorodnienia lewą stronę nierówności pomnożyć przez abc, a prawą przez $ab+bc+ca$. Następnie skorzystać z nierówności $\frac{x^2+y^2}{x+y} \geqslant \frac{x+y}{2}$.

3. Zapisać $a+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(a+c)$ wraz z dwiema analogicznymi równościami. Wykorzystać nierówność $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

4. Po ujednorodnieniu mamy wykazać nierówność $a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt[3]{abc}(a+b+c)$. Można to zrobić, dodając stronami nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną $\frac{4a^2+b^2+c^2}{6} \geqslant \sqrt[6]{a^8b^2c^2}$ oraz dwie nierówności analogiczne.

5. Przyjąć $a+b+c = \frac{1}{2}$ i udowodnić, że $\sqrt{\frac{a}{1-a}} \geqslant 2a$ dla $0 < a < \frac{1}{2}$ oraz analogicznie dla b i c.

6. Przyjąć warunek $a+b+c=1$. Wtedy $\frac{a^n}{b+c} = \frac{a^n}{1-a} = a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + \ldots$ Korzystając dla $k \geqslant n \geqslant 1$ z nierówności $\sqrt[k]{\frac{a^k+b^k+c^k}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$, otrzymamy $a^k+b^k+c^k \geqslant \frac{1}{3^{k-1}}$. Tę ostatnią nierówność wystarczy zsumować dla $k = n, n+1, n+2, \ldots$

7. Znów przyjąć, że $a+b+c=1$. Posługując się nierównościami między średnimi potęgowymi, wykazać dla $k \geqslant n$ nierówności $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}(a^k+b^k+c^k) \leqslant a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}$ i zsumować je.