Problem Parzystkowa i jego uogólnienia

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W mieście Parzystkowo zacny burmistrz postanowił w nietypowy sposób zaktywizować społeczeństwo. Zarządził utworzenie stowarzyszeń, które wykonywać będą powierzone im zadania. W trakcie zebrania z Radą Miasta uchwalono następujące zasady:

1. każde stowarzyszenie wyznaczone jest jednoznacznie przez swój skład (innymi słowy nie ma dwóch stowarzyszeń o takim samym składzie osobowym),
2. każde stowarzyszenie ma parzystą liczbę uczestników,
3. część wspólna każdych dwóch stowarzyszeń tworzy ugrupowanie złożone z parzystej liczby uczestników.

Warunek 1, 2 oraz 3 dopuszczają istnienie pustego stowarzyszenia!

Rada rada, burmistrz zadowolony... A mieszkańcy? Bardzo chętni do dzielenia się na stowarzyszenia. Okazało się jednak, że to, co łatwe w teorii, w praktyce może być trudne. Powstał bowiem niemały chaos – tym większy, im więcej stowarzyszeń już zostało powołanych. Wszystko dlatego, że mieszkańcy chcieli utworzyć ich jak najwięcej. Zbadajmy tę sprawę.

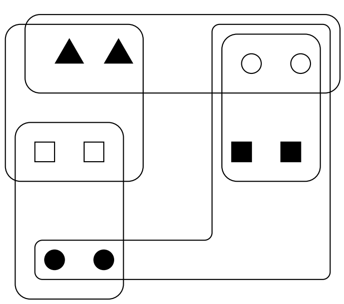
Opisany powyżej problem zwany *problemem Parzystkowa* (*Eventown problem*) można sformułować następująco. Niech P będzie zbiorem n-elementowym oraz niech $S_1, \ldots, S_m$ będą jego podzbiorami. Żądamy od tych podzbiorów, żeby:

1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $2 \,|\, \big|S_i\big|$ dla dowolnego i,
3. $2 \,|\, \big|S_i \cap S_j\big|$ dla $i \neq j$,

gdzie $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X. Zachodzi następujące oszacowanie na liczbę ugrupowań.

Twierdzenie 1. *Maksymalna liczba stowarzyszeń w Parzystkowie liczącym n mieszkańców wynosi co najmniej $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Dowód jest prosty i konstruktywny.



Dowód. Załóżmy na początek, że $n = 2k$ dla pewnego k. Dzielimy zbiór $2k$-elementowy na k różnych podzbiorów 2-elementowych. Każde stowarzyszenie budujemy teraz z tych par (rysunek obok). Jak widać, takie stowarzyszenia spełniają wszystkie postulowane warunki.

Ponieważ par jest k, wszystkich podzbiorów jest 2^k. Znaleźliśmy zatem $2^k = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ stowarzyszeń, co kończy dowód w przypadku $n = 2k$. Jeśli teraz $n = 2k + 1$, to odsuwamy na bok jednego mieszkańca i rozważamy problem dla parzystej liczby mieszkańców, otrzymując $2^k = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ stowarzyszeń. $\square$

Zauważamy, że próba manipulowania parami nie prowadzi do utworzenia nowego stowarzyszenia ponad te zdefiniowane przez podzbiory par. Okazuje się ponadto, że jest to najlepszy możliwy podział – nierówność w twierdzeniu 1 można zastąpić równością.

Twierdzenie 2. *Maksymalna liczba stowarzyszeń w Parzystkowie liczącym n mieszkańców wynosi dokładnie $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Niełatwy dowód tego twierdzenia pomijamy. Oryginalny problem Parzystkowa można oczywiście modyfikować. Niech $m(n, \ell)$ oznacza maksymalną liczbę stowarzyszeń w mieście o n mieszkańcach, przy następujących zasadach:

1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $\ell \big| \big|S_i \cap S_j\big|$ dla $i \neq j$.

Zauważmy, że można podzielić mieszkańców na zbiory złożone z $\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor$ osób i rozważyć stowarzyszenia jako podzbiory tych grup (tak jak w Parzystkowie). Wynika z tego następujące oszacowanie.

Twierdzenie 3. $m(n, \ell) \geqslant 2^{\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor}$.

Powyższe szacowanie jest elementarne, jednak nie jest znane ogólne, dokładne rozwiązanie.

Problem Nieparzystkowa

Pokażemy teraz, że w pewnych sytuacjach potrafimy podać dokładną odpowiedź. Rozważmy problem miasta Nieparzystkowo:

1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $2 \nmid S_i$ dla dowolnego i,
3. $2 \big| |S_i \cap S_j|$ dla $i \neq j$.

Ciało to struktura algebraiczna, w której możliwe jest wykonywanie dwóch operacji umownie zwanych dodawaniem oraz mnożeniem. Możemy również zdefiniować operację dzielenia przez liczbę różną od zera oraz zachodzą prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Znanym każdemu przykładem ciała jest zbiór liczb rzeczywistych (jeśli liczba jest niezerowa, to możemy przez nią dzielić). Przykładem ciała skończonego jest $\mathbb{Z}_p$ – zbiór liczb od 0 do $p-1$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb całkowitych modulo p.

Ponownie pytamy o maksymalną liczbę stowarzyszeń. Zaczniemy tym razem od podania górnego szacowania. Niech $\mathbb{F}_q$ będzie ciałem o q-elementach. Zbiór $\mathbb{F}_q^n$ to zbiór wektorów $(a_1, \ldots, a_n)$, gdzie każde $a_i \in \mathbb{F}_q$. W tym zbiorze naturalnym działaniem jest dodawanie wektorów po współrzędnych. Możemy również rozważyć działanie mnożenia liczby przez wektor. To znaczy jeśli $\alpha \in \mathbb{F}_q$, to

$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \ldots, \alpha \cdot a_n).$$

Powiemy, że wektory $v_1, \ldots, v_k$ są **liniowo niezależne** w $\mathbb{F}_q^n$, jeśli układ równań

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = (0, \ldots, 0)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. W $\mathbb{F}_q^n$ możemy również rozważyć **iloczyn skalarny** dwóch wektorów $a = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $b = (b_1, \ldots, b_n)$, to jest liczbę

$$a \cdot b = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Zauważmy, że jeżeli wśród wektorów $v_1, \ldots, v_k$ są dwa wektory równe lub jeden z wektorów jest złożony z samych zer, to wektory te nie są liniowo niezależne.

Lemat. *Jeżeli $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{F}_q^n$ oraz wektory te są liniowo niezależne, to $k \leqslant n$.*

Dowód. Zauważmy, że każdy wektor $a \in \mathbb{F}_q^n$ można zapisać jednoznacznie jako $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$, gdzie w wektorze e_j na j-tym miejscu stoi 1, na pozostałych zaś 0. W szczególności wektory $e_1, \ldots, e_n$ są liniowo niezależne. Pokażemy teraz, że żaden inny układ wektorów liniowo niezależnych nie może być liczniejszy niż n.

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

Załóżmy, że $k > n$. Z uczynionej przed chwilą uwagi każdy z v_i można zapisać jako sumę $v_i = \alpha_{i,1} e_1 + \ldots + \alpha_{i,n} e_n$, wiemy w szczególności, że v_1 także można. Załóżmy teraz bez straty ogólności, że $\alpha_{1,1} \neq 0$ (gdyby tak nie było, to wystarczy przenumerować wektory $e_1, \ldots, e_n$ do otrzymania żądanej cechy). Wtedy również

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} v_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}} e_2 + \ldots - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{1,1}} e_n,$$

Jeśli $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}_q$, to dla $a \in \mathbb{Z}_q$ napis $\frac{1}{a}$ należy rozumieć jako mnożenie $1 \cdot a^{-1}$. To ostatnie zaś to liczba odwrotna do a, czyli taka liczba, dla której $a \cdot a^{-1} = 1$. Dla przykładu jeśli $q = 7$, to $6^{-1} = 6$, gdyż $6 \cdot 6 = 1 \mod 7$; podobnie $2^{-1} = 4$, gdyż $2 \cdot 4 = 1 \mod 7$.

zatem każdy wektor, który można zapisać jako kombinację wektorów $e_1, \ldots, e_n$, można również zapisać jako kombinację wektorów $v_1, e_2, \ldots, e_n$. W szczególności v_2 można tak zapisać. Zauważmy, że przynajmniej jeden ze współczynników stojących przy $e_2, \ldots, e_n$ w zapisie $v_2 = \alpha_{2,1} v_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \ldots + \alpha_{2,n} e_n$ jest niezerowy; w przeciwnym przypadku v_2 byłby liniowo zależny od v_1. Podobnie jak poprzednio, można założyć, że $\alpha_{2,2} \neq 0$, oraz uzasadnić, że każdy wektor, który jest kombinacją wektorów $v_1, e_2, \ldots, e_n$, jest też kombinacją wektorów $v_1, v_2, e_3, \ldots, e_n$.

Postępując analogicznie jak powyżej dla v_i $(i = 3, 4, 5)$ dochodzimy do momentu, w którym wszystkie wektory $e_1, \ldots, e_n$ zastąpiliśmy przez $v_1, \ldots, v_n$. Ponieważ założyliśmy, że $k > n$, zatem wektor v_{n+1}, który potrafimy zapisać za pomocą wektorów $e_1, \ldots, e_n$, potrafimy również zapisać za pomocą wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Jest to jednak sprzeczne z liniową niezależnością wektorów.

Otrzymana powyżej sprzeczność oznacza, że warunek $k > n$ jest niemożliwy do spełnienia. □

Twierdzenie 4. *W Nieparzystkowie o n mieszkańcach można utworzyć co najwyżej n stowarzyszeń.*

Modelem $\mathbb{F}_2$ jest $\mathbb{Z}_2$, w którym działania dodawania i mnożenia definiują tabelki poniżej.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Dowód. Rozważmy zbiór $\mathbb{F}_2^n$. Każde stowarzyszenie S reprezentujemy przez jego wektor charakterystyczny 1_S w $\mathbb{F}_2^n$, to jest taki wektor, w którym jeśli $P = \{1, \ldots, n\}$, to i-ta współrzędna wektora 1_S jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in S$. W przeciwnym przypadku i-ta współrzędna jest równa 0. Powiedzmy, że tych wektorów jest k.

Jeśli $n = 6$ oraz $S = \{1, 4, 6\}$, to $1_S = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$.

Wektory postaci 1_S są liniowo niezależne. Aby to uzasadnić, załóżmy, że
$$z = \alpha_1 1_{S_1} + \ldots + \alpha_k 1_{S_k} = 0,$$
i rozważmy iloczyn skalarny $1_{S_\ell} \cdot z$ dla pewnego S_ℓ (dowolnego; $\ell \in \{1, \ldots, k\}$). Zauważmy, że:

- $1_{S_i} \cdot 1_{S_i} = 1$ (liczba członków stowarzyszenia jest nieparzysta) – iloczyn skalarny obliczamy modulo 2 (patrz tabele na marginesie),
- $1_{S_i} \cdot 1_{S_j} = 0$ dla $i \neq j$ (część wspólna stowarzyszeń jest parzysta).

Wynika z tego, że
$$0 = z \cdot 1_{S_\ell} = \alpha_1 1_{S_1} 1_{S_\ell} + \ldots + \alpha_k 1_{S_k} 1_{S_\ell} = \alpha_\ell.$$
Rozważając kolejne $\ell = 1, \ldots, k$, otrzymujemy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, a więc wektory $1_{S_1}, \ldots 1_{S_k}$ są liniowo niezależne. Z lematu wynika teraz, że $k \leqslant n$.

Ostatni krok to pokazanie, że można utworzyć dokładnie n stowarzyszeń. W tym celu wystarczy, aby każde stowarzyszenie złożone było z jednego mieszkańca. $\square$

Na zakończenie

Wróćmy do ogólnego problemu. Jak już wspomnieliśmy, nie istnieje ogólny wzór na $m(n, \ell)$. W twierdzeniu 3 wskazane zostało dolne oszacowanie. Ciekawe natomiast jest także znalezienie szacowania górnego. Wskazujemy je w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 5. pochodzi z pracy P. Frankl, A.M. Odlyzko, *On Subsets with Cardinalities of Intersections Divisible by a Fixed Integer*, European Journal of Combinatorics, 4 (1983), 215–220.

$24 = 2^3 \cdot 3 \Longrightarrow \Omega(24) = 3 + 1 = 4$
$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \Longrightarrow \Omega(600) = 3 + 1 + 2 = 6$

Twierdzenie 5. Zachodzą nierówności:

- $m(n, \ell) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \Omega(\ell) n$, gdzie $\Omega(\ell)$ jest krotnością czynników pierwszych w rozkładzie liczby ℓ.
- $m(n, \ell) \leqslant 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2\ell} \rfloor} \binom{n}{i} + \Omega(\ell) n$,
- dla $\ell \leqslant 166$ zachodzi $m(n, \ell) \geqslant (8\ell)^{\lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$,
- dla $\ell \geqslant 167$ zachodzi $m(n, \ell) \geqslant 2^{8 \lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$.

Ciekawostką jest fakt, że w dowodzie trzeciego z powyższych oszacowań wykorzystuje się tak zwane macierze Hadamarda (macierze kwadratowe o wymiarze $4\ell \times 4\ell$ o tej własności, że ich wyrazami są tylko 1 oraz -1 i iloczyny skalarne wszystkich możliwych par wierszy są równe 0). Wiadomo, że takie macierze istnieją dla wszystkich $\ell \leqslant 166$ oraz dla wszystkich liczb postaci 2^k, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną.

Matematyczny kącik muzyczny I: Pitagorejczycy i matematyczne początki muzyki

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

*Student matematyki, MIM UW

Jak przekazują nam starożytni, zaczęło się od przypadkowego odkrycia przypisywanego Pitagorasowi – otóż miał on spostrzec, że jeśli stosunek długości dwóch strun jest równy stosunkowi dwóch małych liczb naturalnych, to współbrzmią one harmonijnie. Jeżeli jedna ze strun będzie dwa razy krótsza od drugiej (stosunek $2:1$), to będzie brzmiała oktawę wyżej (według obecnej nomenklatury interwałów). Gdy stosunek długości wynosi $3:2$, otrzymamy interwał kwinty czystej, a $4:3$ – kwarty czystej. Co więcej, budując od pewnego dźwięku wpierw kwintę w górę, a od otrzymanego kwartę w górę, otrzymujemy dźwięk brzmiący oktawę wyżej od bazowego (o czym nietrudno się przekonać, mnożąc proporcje kwinty i kwarty). Jeśli natomiast wychodząc od pewnego dźwięku, zagramy dwa dźwięki odpowiednio kwartę i kwintę wyżej, to różnica pomiędzy nimi będzie całym tonem o proporcji $9:8$. Półton zaś rozumiano jako pozostałość po odjęciu od kwarty dwóch całych tonów $(\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9})$ – daje to proporcję $256:243$. Już starożytni byli jednak świadomi, że nie jest to dokładnie połowa całego tonu.

Wiele jest wersji tej historii – najpopularniejsza mówi, że przechodząc obok warsztatu kowalskiego, Pitagoras usłyszał harmonijne współbrzmienia, jakie wydawały kowadła, co miało rzekomo wynikać z różnicy w ciężarze młotów. To oczywiście nieprawda – wysokość dźwięku zależy od budowy kowadła, a nie młota. Inną wersją jest historia z przywiązywaniem różnych ciężarków do strun, również fałszywa – częstotliwości tonów harmonicznie drgającej struny wyrażają się dość skomplikowanym wzorem, a nie tak prostymi stosunkami liczb naturalnych, jak twierdzili Pitagorejczycy. Prawdopodobnie zjawisko to odkrył Pitagoras za pomocą monochordu, czyli instrumentu o jednej strunie.