Wektory postaci 1_S są liniowo niezależne. Aby to uzasadnić, załóżmy, że

$$z = \alpha_1 1_{S_1} + \ldots + \alpha_k 1_{S_k} = 0,$$

i rozważmy iloczyn skalarny $1_{S_\ell} \cdot z$ dla pewnego S_ℓ (dowolnego; $\ell \in \{1, \ldots, k\}$). Zauważmy, że:

- $1_{S_i} \cdot 1_{S_i} = 1$ (liczba członków stowarzyszenia jest nieparzysta) – iloczyn skalarny obliczamy modulo 2 (patrz tabele na marginesie),
- $1_{S_i} \cdot 1_{S_j} = 0$ dla $i \neq j$ (część wspólna stowarzyszeń jest parzysta).

Wynika z tego, że

$$0 = z \cdot 1_{S_\ell} = \alpha_1 1_{S_1} 1_{S_\ell} + \ldots + \alpha_k 1_{S_k} 1_{S_\ell} = \alpha_\ell.$$

Rozważając kolejne $\ell = 1, \ldots, k$, otrzymujemy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, a więc wektory $1_{S_1}, \ldots 1_{S_k}$ są liniowo niezależne. Z lematu wynika teraz, że $k \leqslant n$.

Ostatni krok to pokazanie, że można utworzyć dokładnie n stowarzyszeń. W tym celu wystarczy, aby każde stowarzyszenie złożone było z jednego mieszkańca. $\square$

Na zakończenie

Wróćmy do ogólnego problemu. Jak już wspomnieliśmy, nie istnieje ogólny wzór na $m(n, \ell)$. W twierdzeniu 3 wskazane zostało dolne oszacowanie. Ciekawe natomiast jest także znalezienie szacowania górnego. Wskazujemy je w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 5. pochodzi z pracy P. Frankl, A.M. Odlyzko, *On Subsets with Cardinalities of Intersections Divisible by a Fixed Integer*, European Journal of Combinatorics, 4 (1983), 215–220.

$24 = 2^3 \cdot 3 \Longrightarrow \Omega(24) = 3 + 1 = 4$
$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \Longrightarrow \Omega(600) = 3 + 1 + 2 = 6$

Twierdzenie 5. Zachodzą nierówności:

- $m(n, \ell) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \Omega(\ell)n$, gdzie $\Omega(\ell)$ jest krotnością czynników pierwszych w rozkładzie liczby ℓ.
- $m(n, \ell) \leqslant 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2\ell} \rfloor} \binom{n}{i} + \Omega(\ell)n$,
- dla $\ell \leqslant 166$ zachodzi $m(n, \ell) \geqslant (8\ell)^{\lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$,
- dla $\ell \geqslant 167$ zachodzi $m(n, \ell) \geqslant 2^{8\lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$.

Ciekawostką jest fakt, że w dowodzie trzeciego z powyższych oszacowań wykorzystuje się tak zwane macierze Hadamarda (macierze kwadratowe o wymiarze $4\ell \times 4\ell$ o tej własności, że ich wyrazami są tylko 1 oraz -1 i iloczyny skalarne wszystkich możliwych par wierszy są równe 0). Wiadomo, że takie macierze istnieją dla wszystkich $\ell \leqslant 166$ oraz dla wszystkich liczb postaci 2^k, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną.

Matematyczny kącik muzyczny I: Pitagorejczycy i matematyczne początki muzyki

*Konstanty KOSTRZEWSKI**

*Student matematyki, MIM UW

Wiele jest wersji tej historii – najpopularniejsza mówi, że przechodząc obok warsztatu kowalskiego, Pitagoras usłyszał harmonijne współbrzmienia, jakie wydawały kowadła, co miało rzekomo wynikać z różnicy w ciężarze młotów. To oczywiście nieprawda – wysokość dźwięku zależy od budowy kowadła, a nie młota. Inną wersją jest historia z przywiązywaniem różnych ciężarków do strun, również fałszywa – częstotliwości tonów harmonicznie drgającej struny wyrażają się dość skomplikowanym wzorem, a nie tak prostymi stosunkami liczb naturalnych, jak twierdzili Pitagorejczycy. Prawdopodobnie zjawisko to odkrył Pitagoras za pomocą monochordu, czyli instrumentu o jednej strunie.

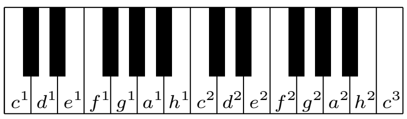
Jak przekazują nam starożytni, zaczęło się od przypadkowego odkrycia przypisywanego Pitagorasowi – otóż miał on spostrzec, że jeśli stosunek długości dwóch strun jest równy stosunkowi dwóch małych liczb naturalnych, to współbrzmią one harmonijnie. Jeżeli jedna ze strun będzie dwa razy krótsza od drugiej (stosunek $2:1$), to będzie brzmiała oktawę wyżej (według obecnej nomenklatury interwałów). Gdy stosunek długości wynosi $3:2$, otrzymamy interwał kwinty czystej, a $4:3$ – kwarty czystej. Co więcej, budując od pewnego dźwięku wpierw kwintę w górę, a od otrzymanego kwartę w górę, otrzymujemy dźwięk brzmiący oktawę wyżej od bazowego (o czym nietrudno się przekonać, mnożąc proporcje kwinty i kwarty). Jeśli natomiast wychodząc od pewnego dźwięku, zagramy dwa dźwięki odpowiednio kwartę i kwintę wyżej, to różnica pomiędzy nimi będzie całym tonem o proporcji $9:8$. Półton zaś rozumiano jako pozostałość po odjęciu od kwarty dwóch całych tonów $(\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9})$ – daje to proporcję $256:243$. Już starożytni byli jednak świadomi, że nie jest to dokładnie połowa całego tonu.

Powiązanie muzyki z liczbami – poznanie dźwięków za pomocą liczb – skłoniło Pitagorasa do odważnego twierdzenia, że wszystko jest liczbą (liczba jako ἀρχή – zasada wszystkich rzeczy). Odtąd Pitagoras widział liczby we wszystkim – nie tylko w obiektach fizycznych, ale i pojęciach takich, jak sprawiedliwość czy właściwa pora. Skoro zaś pryncypia matematyki były przez Pitagorejczyków uważane za pryncypia wszystkich rzeczy, miało to istotny wpływ na rozwój tej dziedziny nauki, wspierany później przez Platona i Arystotelesa w, odpowiednio, *Akademii* i *Lykejonie*.

Proste interwały występują w przyrodzie

Dźwięk drgającej struny rozkłada się na szereg tzw. *tonów prostych* – struna drga zarówno w całej swej długości, jak i na każdej z połów, części trzecich itd. Stąd oprócz dźwięku podstawowego słyszalne są tzw. *alikwoty*, czyli dźwięki pozostające w stosunkach do bazowego kolejno $2:1$, $3:1$, $4:1$ itd. Widać od razu, że kolejne alikwoty tworzą wspomniane wcześniej interwały.

Komat pitagorejski



Ściągawka pianistyczna. Interwał między c^i oraz c^{i+1} odpowiada oktawie, między c^i oraz g^i kwincie, między c^i oraz f^i kwarcie, a między c^i oraz e^i tercji wielkiej.
Dodanie końcówki *–is* oznacza kolejny klawisz na klawiaturze, czarny lub biały. Czyli na przykład cis1 to pierwszy od lewej czarny klawisz na powyższym rysunku.

Wnikliwy Czytelnik zapewne zauważy, że wychodząc od pewnego dźwięku bazowego i budując od niego szereg oktaw i szereg kwint, żaden z nowo utworzonych dźwięków nie wystąpi jednocześnie w obu tych szeregach. Wynika to z prostego faktu, że nie istnieją liczby całkowite k, l takie, że $2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^l$. Przyglądając się jednak klawiaturze współczesnego fortepianu, dostrzeżemy, że pierwsze takie zejście następuje po 7 oktawach (12 kwintach), gdyż „pianistyczna" oktawa to odległości między 12 kolejnymi klawiszami (wliczając klawisze czarne), a „pianistyczna" kwinta to odległość między 7 klawiszami. I faktycznie, w naszych ciągach pitagorejskich interwałów w tym miejscu występuje niewielka różnica – stosunek $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 \approx 1{,}01364$ (zwany *komatem pitagorejskim*) stanowi niecałą $\frac{1}{4}$ (w sensie „pierwiastek 4. stopnia") „pianistycznego" półtonu. Jest więc to różnica słyszalna. Gdybyśmy w fortepianie nastroili struny c^1, g^1, d^1, a^1, e^1, h^1, fis^1, cis^1, gis^1, dis^1, ais^1, eis^1, his^1 tak, by interwał między dwoma kolejnymi dźwiękami był kwintą czystą (z ewentualnym sprowadzeniem do oktawy pomiędzy c^1 i c^2), to okazałoby się, że dźwięk his^1 jest wyższy niż dźwięk c^2.

Pierwszą wzmiankę o komacie pitagorejskim znajdujemy u Euklidesa w dziele „Podział kanonu" (kanon to inna nazwa na monochord). Zauważył on mianowicie, że $262144 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^6 = 531441$ oraz że $262144 \cdot \frac{2}{1} = 524288$, czyli interwał oktawy jest mniejszy od złożenia sześciu całych tonów (z których każdy jest złożeniem dwóch kwint pomniejszonym o oktawę).

Myśląc o greckich interwałach, powinniśmy tak naprawdę zarzucić myślenie współczesną klawiaturą fortepianu, którego dźwięki stroi się inaczej – temu problemowi poświęcimy następny artykuł. Trudno powiedzieć, czy Pitagorejczycy rozważali problem instrumentu o stałym stroju, jakimi są instrumenty klawiszowe. Ówczesne instrumenty były przede wszystkim strunowe (jak np. kithara, lira czy harfa) lub dęte (najpopularniejszy był aulos, który można luźno kojarzyć z parą obojów), toteż wszelkie „niedoskonałości" wynikające ze stałego umiejscowienia otworów w piszczałce lub naciągu strun można było niwelować, nie przesłaniając do końca otworu lub palcem skracając strunę.

W ogóle Grecy mieli inne podejście do interwałów niż my współcześnie. Rozważali i stosowali takie interwały, jak $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ czy nawet $\frac{3}{8}$ całego tonu, tworząc na ich podstawie różne rodzaje tetrachordów – sekwencji czterech dźwięków; z tetrachordów budowano następnie skale i systemy. Różnica w wielkości interwałów miała wpływ na barwę skali, przez co i charakter utworu, który był na niej oparty. Z czasem jednak niektóre z nich zanikały, lecz sama koncepcja mikrointerwałów trwała jeszcze w VII w. n.e. w monodii chorałowej, choć też powoli zanikała. Odrodziła się w muzyce na początku XX wieku.

Nam, przesiąkniętym obecną muzyką i sposobem strojenia instrumentów z pewnością trudno byłoby przekonać się do zupełnie innego myślenia muzycznego Greków – ich muzyka wydałaby się nam po prostu fałszywa i niezrozumiała.

Na koniec pokażmy jeszcze różnicę między tercją wielką wynikającą z szeregu harmonicznego $(5:4)$ a otrzymaną ze złożenia dwóch całych tonów $\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{5}\right)$. Jest ona równa $81:80 = 1{,}0125$, czyli nieznacznie mniejsza od komatu pitagorejskiego. Ten tzw. *komat syntoniczny* okazuje się być istotnym problemem, gdy w Europie rozpoczyna się operowanie trójdźwiękiem i harmonią modalną. O tym, dlaczego sprawia to kłopot i jak sobie z tym fantem radzono, opowiemy w następnym artykule.