stopnia $\leqslant 2$ dowolnej liczby zmiennych, gdyż zachodzi następujące słynne twierdzenie Hassego–Minkowskiego:

Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ *będzie formą kwadratową nieokreśloną o współczynnikach całkowitych. Jeśli dla każdego* $m > 1$ *kongruencja* $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}$ *ma rozwiązanie* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *spełniające* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, m) = 1$*, to istnieją* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$*, że* $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *oraz* $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Nierozwiązalność kongruencji $F \equiv 0 \pmod{m}$ dla liczby m odpowiednio dobranej do badanego równania diofantycznego $F = 0$ jest ewidentną przeszkodą dla jego rozwiązalności w liczbach całkowitych. Przykłady takie, jak Selmera, Reichardta, równanie (1) i wiele, wiele innych dotykają trudnej rzeczywistości: czasem przeszkody na drodze do rozwiązalności są bardziej subtelne i głębiej ukryte. I tak np. równania reprodukowane w tym tekście dają nietrywialne elementy grupy Szafarewicza–Tate'a odpowiednich krzywych eliptycznych. Kryje się za tym wszystkim matematyka nowoczesna i abstrakcyjna, ale jednocześnie bardzo, bardzo konkretna – nasz przykład równania (1) ilustruje oczywiście tylko ten drugi aspekt. Ma to być jednak wystarczającą zachętą dla Czytelnika Zainteresowanego teorią liczb, aby pogłębić swoje studia tego fascynującego działu matematyki :)

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1639. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

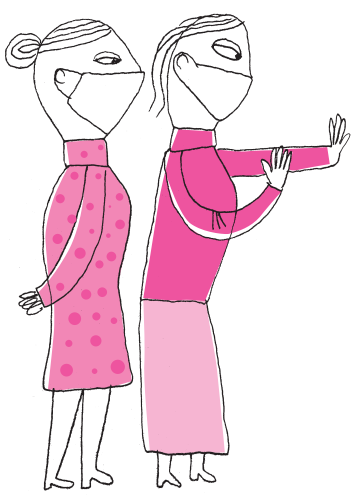
$$f(x+y) + y \leqslant f(f(f(x))).$$

Rozwiązanie na str. 17

M 1640. Wśród dowolnych trzech uczestników pewnego kółka matematycznego można wskazać dwóch, którzy wzajemnie się lubią, a wśród dowolnych czterech uczestników są dwaj tacy, którzy się wzajemnie nie lubią. Zakładając, że każdych dwóch uczestników darzy się wzajemną sympatią lub antypatią, znajdź największą możliwą liczbę uczestników kółka.
Rozwiązanie na str. 12

M 1641. Udowodnij, że liczba składająca się w zapisie dziesiętnym z 2^n jedynek ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.
Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 1001. Oszacuj temperatury powierzchni Ziemi i Marsa, jakie ustaliłyby się, gdyby jedynym źródłem energii było promieniowanie słoneczne. Uwzględnij odbicie części promieniowania od powierzchni planety. Dla Ziemi uśredniony względem czasu ułamek odbijanej energii słonecznej (albedo) wynosi $A_{\mathrm{Z}} = 0{,}306$, dla Marsa $A_{\mathrm{M}} = 0{,}25$. Strumień energii słonecznej docierającej do Ziemi (stała słoneczna) $S \approx 1{,}36\ \mathrm{kW/m^2}$, stała Stefana–Boltzmanna $\sigma \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$. Duża półoś orbity Marsa $a_{\mathrm{M}} \approx 1{,}55$ au (au $\approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m oznacza tzw. jednostkę astronomiczną równą dużej półosi orbity Ziemi a_{Z}).
Rozwiązanie na str. 7

F 1002. Temperatura skał tworzących płaszcz Ziemi rośnie wraz z głębokością. Szybkość obserwowanej zmiany zależy od miejsca na powierzchni Ziemi. Ocenia się, że z dala od granic płyt tektonicznych wynosi od 25 K/km do 30 K/km. Oszacuj, jaka byłaby średnia temperatura powierzchni Ziemi, gdyby nie ogrzewało jej Słońce. Dla skał przyjmij średni współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda \approx 2\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. Stała Stefana–Boltzmanna $\sigma \approx 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.
Rozwiązanie na str. 6