Równoległobok

Bartłomiej BZDĘGA

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych, ale można by go zdefiniować jeszcze na kilka innych sposobów. Dla czworokąta wypukłego $ABCD$ następujące warunki są parami równoważne (dowód pomijamy):

- $AB \parallel CD$ i $BC \parallel DA$,
- $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$,
- $|AB| = |CD|$ i $|BC| = |DA|$,
- odcinki AC i BD mają wspólny środek.

Siła powyższego twierdzenia polega na tym, że jeśli wykażemy, że pewien czworokąt wypukły spełnia choć jeden z powyższych warunków, to możemy mieć pewność, że spełnia on wszystkie pozostałe.

Równoległoboki względnie często pojawiają się w zadaniach olimpijskich. Niekiedy jawnie – w założeniach lub tezie, gdy mamy dany pewien równoległobok lub chcemy wykazać, że jakiś czworokąt nim jest. Czasem treść zadania wskazuje na to, że gdzieś w rozważanej konfiguracji geometrycznej ukryty jest równoległobok, na przykład gdy trzeba wykazać, że jakaś prosta przechodzi przez środek jakiegoś odcinka. Nie brakuje również zadań, w których treści nie dopatrzymy się równoległoboku, ale musimy go znaleźć lub dorysować, aby zadanie rozwiązać.

Zadania

1. Na płaszczyźnie leżą różne punkty A, B, C i D. Punkty P, Q, R, S, T, U są środkami odpowiednio odcinków AB, BC, CA, AD, BD, CD. Dowieść, że odcinki PU, QS i RT mają wspólny punkt.
2. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty P i Q są środkami odcinków odpowiednio CD i AB. Wykazać, że jeśli $AP \parallel CQ$ i $BP \parallel DQ$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
3. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ABC. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkty P i Q są symetryczne do M względem prostych odpowiednio AD i BE. Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ.
4. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC i AC w punktach odpowiednio D i E. Punkt $K \neq D$ leży na prostej DE, przy czym $|BD| = |BK|$. Dowieść, że prosta AI przechodzi przez środek odcinka EK.
5. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na proste odpowiednio BC, CA, AB. Punkty G, H, I są ortocentrami trójkątów odpowiednio AFE, BDF, CED. Dowieść, że trójkąty DEF i GHI są przystające.
6. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q. Punkt P jest środkiem odcinka BC. Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T. Punkt R jest środkiem odcinka AT, natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowieść, że prosta PS jest równoległa do prostej QR.
7. Niech AB będzie krótszym łukiem okręgu o. Na łuku AB wybieramy punkt P różny od A i B. Punkt Q leży na prostej AP i spełnia równość $|PQ| = |BQ|$. Punkt R leży na prostej BP i spełnia warunek $|AR| = |RP|$. Wreszcie punkt M jest środkiem odcinka QR i przez ℓ oznaczamy prostą PM. Dowieść, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste ℓ (dla różnych punktów P) mają punkt wspólny.
8. Dowieść, że wielokąt wypukły można rozciąć na skończoną liczbę równoległoboków wtedy i tylko wtedy, gdy ma on środek symetrii.

Wskazówki do zadań

1. Odcinki QR i ST są równoległe do AB i mają długość $\frac{1}{2}|AB|$. Wynika z tego, że albo punkty T, Q, R, S leżą na jednej prostej, albo wyznaczają równoległobok. Analogicznie jest dla odcinków PU i RT.

2. Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AP i DQ, natomiast L – odcinków BP i CQ. Trójkąty AKQ i QLB są podobne do trójkąta APB w skali $\frac{1}{2}$ (kbk), a trójkąt LQK jest do nich przystający (bkb). W takim razie $KL \parallel AB$ i $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$, analogicznie $KL \parallel DC$ i $|KL| = \frac{1}{2}|DC|$.

3. Czworokąty $AMDP$ i $MBQE$ są rombami, bo ich przekątne dzielą się na połowy i są prostopadłe. Odcinki DP i EQ mają zatem długość $\frac{1}{2}|AB|$ i są równoległe do AB.

4. Rozważmy romb $ABPQ$, którego przekątna AP leży na prostej AI. Punkt K leży na odcinku BP, a ponadto $|BK| = |QE|$, więc czworokąt $BKQE$ jest równoległobokiem. Z tego wynika, że środek odcinka EK pokrywa się ze środkiem rombu $ABPQ$.

5. Czworokąty $EPDI$ i $FHDP$ są równoległobokami, gdyż mają po dwie pary boków równoległych, więc czworokąt $GFDI$ też jest równoległobokiem. Z tego wynika, że $|GI| = |DF|$. Analogicznie $|GH| = |DE|$ i $|HI| = |EF|$.

6. Narysujmy równoległobok $BUCT$. Czworokąt $CQSU$ też jest równoległobokiem, czyli $US \parallel AQ$. Na koniec $\frac{|RT|}{|TP|} = \frac{|AT|}{|TU|} = \frac{|QT|}{|TS|}$.

7. Rozważmy równoległobok $PRSQ$. Jest oczywiste, że prosta ℓ przechodzi przez punkt S. Okrąg opisany na trójkącie QRS przechodzi przez punkty A i B, ponadto $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PAS|$, więc prosta AS jest styczna do okręgu o, analogicznie prosta BS. Położenie punktu S nie zależy zatem od wyboru punktu P.

8. Jeżeli można dokonać podziału, to rozważając wszystkie równoległoboki mające jeden z boków równoległy do ustalonego boku wielokąta, dojdziemy do wniosku, że ten wielokąt ma bok równoległy do ustalonego, o tej samej długości. Jest tak dla każdego boku, a wielokąt jest wypukły, więc ma on środek symetrii.
W drugą stronę, niech AB będzie jednym z boków wielokąta środkowosymetrycznego W. Przez W' oznaczmy wielokąt W przesunięty o wektor $\overrightarrow{AB}$. Wówczas wielokąt $W \setminus W'$ łatwo rozciąć na równoległoboki, a wielokąt $W \cap W'$ ma środek symetrii i o dwa boki mniej niż wielokąt W.