

Na stronie www.geogebra.org/m/j7pnmvxv można zobaczyć powyższą ścieżkę w trzech wymiarach.

Rysunek na marginesie przedstawia tę samą ścieżkę narysowaną na czworościanie (widok z góry).

Wróćmy jeszcze na chwilę do trzech wyróżnionych wcześniej ścieżek na dużej sieci siatek. Dzięki opisanej tu metodzie zwijania łatwo możemy się przekonać, że ścieżka oznaczona literą c to w istocie dwie kopie tej samej ścieżki, którą szczegółowo omawialiśmy powyżej. Tym samym nie ma potrzeby rozważania całej ścieżki – wystarczy jej fragment do pierwszego różowego lub białego wierzchołka.

Wykażemy teraz, że na czworościanie nie da się narysować ścieżki o żądanych własnościach. Ustalmy, że ścieżka rozpoczyna się w górnym wierzchołku czworościanu, który na siatce reprezentowany jest przez czarny punkt w lewym dolnym rogu (a na sieci przez... wszystkie czarne punkty!).

Wiemy już, że prosta ścieżka na siatce siatek to trasa myszy, która spełnia nasze wymagania. Wiemy także, jak jednoznacznie składać siatkę siatek. Oznacza to, że każda ścieżka na siatce siatek ma jednoznaczną trasę na czworościanie. Zauważmy jednak, że rysując ścieżkę na siatce siatek łączącą czarne wierzchołki, zawsze przetniemy różowy lub biały wierzchołek (por. rysunek z trzema ścieżkami wyróżnionymi literami a , b , c , str. 3)! Dowiedliśmy tym samym, że każda ścieżka rozpoczynająca się i kończąca w czarnym wierzchołku musi przeciąć inny wierzchołek czworościanu.

Przypadek czworościanu jest najprostszy ze wszystkich wielościanów foremnych. Pozostałe bryły również rozważa się przy użyciu sieci siatek, jednak te są znacznie bardziej skomplikowane. Niemniej wiemy już, że dwunastościan jest wyjątkowy wśród wszystkich brył platońskich.



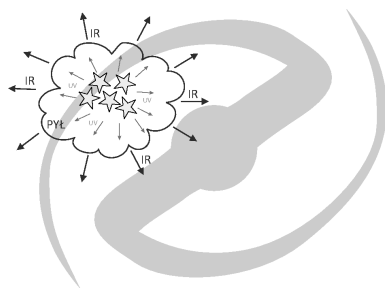
O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk

Katarzyna MAŁEK

Bez względu na to, czy obserwujemy Drogę Mleczną, jej pobliskie sąsiadki, czy bardzo odległe galaktyki, wiemy, że są to podobne obiekty znajdujące się na różnych etapach ewolucji. Astrofizycy klasyfikują je w grupy galaktyk o zbliżonych własnościach fizycznych, a następnie wykorzystują je do bardziej wyrafinowanych analiz naukowych.

Podstawowymi wielkościami fizycznymi używanymi do grupowania galaktyk są: masa gwiazdowa (M_*), tempo powstawania nowych gwiazd (*star formation rate*, SFR) i przesunięcie ku czerwieni (*redshift*, związany z odległością; szerzej o przesunięciu ku czerwieni można przeczytać w Δ_{19}^4). Zarówno masę gwiazdową, jak i tempo powstawania gwiazd można oszacować, zliczając pojedyncze gwiazdy. Jest to jednak niemożliwe do wykonania nawet w przypadku naszej Galaktyki, nie mówiąc o podobnych zliczeniach w galaktykach od nas odległych. Musimy więc polegać na analizie światła gwiazd. Na podstawie promieniowania emitowanego przez galaktykę chcemy oszacować, ile starych i nowych gwiazd się w niej znajduje. Teoretycznie zadanie to nie jest trudne, gdyż wraz z wiekiem gwiazdy zmienia się rodzaj emitowanego przez nią światła. W dużym uproszczeniu młode, masywne gwiazdy świecą bardzo intensywnie w ultrafiolecie, natomiast starsze osobniki w zakresie widma widzialnego i bliskiej podczerwieni (0,8–2,5 μm). Dzięki obserwacjom w tych zakresach długości fal elektromagnetycznych możemy stwierdzić, ile w galaktyce jest gwiazd wyewoluowanych i czy nadal tworzy ona nowe gwiazdy, a jeżeli tak, to jak szybko.

Umownie za młode gwiazdy uważamy te, których wiek nie przekracza 10^7 lat.



Schematyczne przedstawienie chmury narodzin gwiazd w galaktyce.

Cała procedura wydaje się dość łatwa. Dysponujemy przecież ogromnymi teleskopami zaopatrzonymi w filtry pozwalające na obserwacje w dokładnie zdefiniowanym przedziale widma elektromagnetycznego. Niestety obserwatorzy napotykają pewne problemy. Po pierwsze, obserwacje galaktyk zawsze obarczone są błędami (np. związanymi z warunkami pogodowymi). Po drugie, przeciwnikiem jest znajdujący się w galaktykach pył – ten sam pył, z którego rodzą się nowe gwiazdy. Pochłania on część światła w zakresie ultrafioletowym (UV, długość fali pomiędzy 0,1 nm a 0,4 μm) pochodzącego z młodych, masywnych gwiazd. Energia zaabsorbowana przez pył zostaje wyemitowana w zakresach podczerwonych długości fal (IR, pomiędzy 8 a 1000 μm). I tutaj cała sytuacja się komplikuje – okazuje się bowiem, że obserwacje tylko w zakresach optycznym i ultrafioletowym nie odzwierciedlają całego promieniowania elektromagnetycznego pochodzącego od gwiazd. Dodatkowo, same obserwacje w zakresie długości fal podczerwonych zawierają zarówno energię wyemitowaną przez pył, jak i nadwyżkę pochodzącą od młodych gwiazd. Kluczowe staje się więc udzielenie odpowiedzi na następujące pytania: Jaki procent energii wyemitowanej przez młode, masywne gwiazdy jest pochłonięty przez pył? Jaka część widma energetycznego pyłu znajdującego się w galaktyce pochodzi od gwiazd?

Aby rozwiązać ten problem, musimy poczynić pewne założenia. Najważniejsze z nich jest takie, że bilans energetyczny w galaktyce jest stały – oznacza to, że galaktyka nie może „zgubić” energii, a jedynie zmienić jej lokalizację w zakresie długości fal. Cała energia pochłonięta przez pył musi być więc wyemitowana w zakresie długości fal podczerwonych.

Spróbujmy teraz odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób i w zależności od czego energia emitowana z gwiazd jest pochłaniana przez pył międzygalaktyczny. Aby poprawnie rozwiązać ten problem, należy rozwiązać równania transportu energetycznego w galaktykach (*radiative transfer model*, RT). Takie równanie powinno zostać rozwiązane dla każdej z galaktyk osobno, ponieważ zależy ono od geometrii układu, ilości pyłu itp. Jest to bardzo skomplikowane zadanie, które od czasu do czasu udaje się rozwiązać numerycznie (zazwyczaj dla pojedynczych, „specjalnych” galaktyk). Jednak w epoce wielkich przeglądów nieba, dostarczających miliony nowych obserwacji (a już niedługo *Large Synoptic Survey Telescope*, LSST, będzie dostarczał nawet 15 terabajtów danych w ciągu nocy), musimy znaleźć coś szybszego i prostszego: narzędzie, które pomoże w wyznaczeniu w skończonym czasie M_* i SFR dla wszystkich zaobserwowanych galaktyk. Zostało więc opracowane tzw. prawo atenuacji.

W astronomii galaktycznej znamy pojęcie ekstynkcji, czyli pochłaniania i rozpraszania energii pochodzącej z punkowego obiektu i przechodzącej przez „ścianę” pyłu w kierunku obserwatora. Atenuacja jest znacznie bardziej skomplikowanym pojęciem. W przypadku atenuacji mamy do czynienia z wieloma punktowymi źródłami światła zanurzonymi w otaczającym je pyłe. Mogą się one znajdować przed, za lub pomiędzy drobinami pyłu a obserwatorem. Tę skomplikowaną relację astronomowie zwykli opisywać... pojedynczą funkcją potęgową $A(\lambda)$. Tak, to nie jest chochlik drukarski. Najbardziej zaawansowane (i najbardziej fizyczne) prawa atenuacji pyłu w galaktykach składają się aż z... dwóch funkcji potęgowych – jednej dla

obszarów chmur narodzin (*birth cloude*, BC), gdzie pył i gwiazdy są znacznie bardziej skupione, a drugiej dla obszarów międzygalaktycznych (*interstellar medium*, ISM).

$$A(\lambda) = \begin{cases} A_\lambda(\text{BC}) + A_\lambda(\text{ISM}), & \text{dla gwiazd poniżej } <10^7 \text{ lat,} \\ A_\lambda(\text{ISM}), & \text{dla gwiazd powyżej } 10^7 \text{ lat,} \end{cases}$$

gdzie wartość atenuacji A_λ dla długości fali λ jest zdefiniowana jako $A_V \cdot (\lambda/550 \mu\text{m})^\delta$. Wartość wykładnika δ jest różna dla chmury narodzin i dla obszaru międzygalaktycznego, a A_V jest atenuacją zmierzoną w paśmie fotometrycznym V wokół długości fali $\sim 550 \mu\text{m}$.

Atenuacja pyłu jest ściśle związana z długością fali elektromagnetycznej i jest silniejsza dla ultrafioletu oraz mniej zauważalna w bliskiej podczerwieni. Zaskakujące jest to, że porównania ilościowe atenuacji pyłu, pochodzące z rozwiązywania równań transportu energetycznego, i te otrzymane za pomocą modelu złożonego z dwóch funkcji potęgowych są bardzo zbliżone. W ramach błędów obserwacyjnych – pochodzących z teleskopów oraz niepewności dopasowania modeli – obie metody dają zwykle zgodne wyniki.

To właśnie atenuacja pyłu pozwala na modelowanie galaktyk z zachowaniem bilansu energetycznego. Dzięki niej wiemy, ile tak naprawdę jest młodych i starych gwiazd w galaktykach. Wiemy również, jaką korektę zastosować do danych obserwacyjnych, aby oszacować ilość wszystkich gwiazd (masę gwiazdową), zawartość młodych, masywnych gwiazd (SFR) w celu bardziej zaawansowanych analiz ewolucji galaktyk.

Oczywiście nie jest to jedyne zastosowanie analizy jasności pyłu i obserwacji podczerwonych w astrofizyce. O innych zaletach i wadach pyłu oraz o tym, że w odległości 10 miliardów lat świetlnych od Drogi Mlecznej pył uniemożliwia obserwację około 80% znajdujących się tam galaktyk, będziemy jeszcze pisali na łamach *Delty*.

Ziemiolubne liczby i ulotne reszty

Mariusz SKAŁBA *

Człowiek twardo stąpa po ziemi, a z nim pojęcia, które stworzył. Na przykład liczby są tylko tym, do czego człowiekowi służą: porządkowe, kardynalne i inne. W skończonych zastosowaniach są to liczby naturalne $1, 2, 3, \dots$ i ich uogólnienia: liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone. Słowo *skończone* w poprzednim zdaniu odnosi się wyłącznie do opisywanego atrybutu *liczonego* obiektu: a to jego rangi, a to mocy, a to fizycznych rozmiarów. W matematyce teoretycznej liczb praktycznie zawsze potrzebujemy nieskończenie wiele!

Wróćmy zatem na ubitą przez tysiąclecia glebę teorii liczb. Jak udowodnić najprościej, że równanie

$$x^2 - 20xy + y^2 = 100000000003$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y ? Można na przykład zauważyć, że odpowiednia kongruencja mod 4 nie ma rozwiązań. Wynika to stąd, że kwadrat liczby całkowitej zawsze przystaje do 0 lub 1 modulo 4, a zatem lewa jej strona przystaje do 0, 1, 2 modulo 4, a prawa do 3.

Nie zawsze jest tak łatwo i o tym właśnie jest ten artykuł. Rozważmy mianowicie równanie

$$(1) \quad x^4 - 2y^4 = 7z^2$$

i zapytajmy o jego rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z . Jeśli x, y, z jest takim rozwiązaniem oraz $x = 0$, to $-2y^4 = 7z^2$, a więc również $y = z = 0$. Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje rozwiązanie, w którym $x > 0$, i rozważajmy dalej jedno z rozwiązań, w którym x przyjmuje wartość dodatnią najmniejszą z możliwych. Udowodnimy przede wszystkim, że wówczas

$$(2) \quad (x, y) = (x, z) = (y, z) = 1.$$

((a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a, b .) Niech $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ oznacza dalej zbiór wszystkich liczb pierwszych. Załóżmy, że istnieje takie $q \in \mathbb{P}$, że $x = qx_1, y = qy_1$ dla pewnych $x_1, y_1 \in \mathbb{N}_0$, przy czym $x_1 > 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (1) otrzymujemy

$$q^4(x_1^4 - 2y_1^4) = 7z^2$$

i stąd dostajemy, że $z = q^2z_1$, gdzie $z_1 \in \mathbb{N}_0$ (również dla $q = 7$). Liczby x_1, y_1, z_1 spełniają zatem równanie (1), przy czym $0 < x_1 = x/q < x$, sprzeczność z wyborem x . Udowodniliśmy więc, że $(x, y) = 1$. Analogicznie wykazujemy, że $(x, z) = (y, z) = 1$. Z (1) i (2) wynika, że wszystkie liczby x, y, z są nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby x była parzysta, to z (1) wynika, że również z byłaby parzysta, skąd $(x, z) \geq 2$, sprzeczność z (2). Podobnie z jest nieparzysta. Gdyby y była parzysta to mielibyśmy kongruencję

$$x^4 \equiv 7z^2 \pmod{8},$$

ale to nie jest możliwe, gdyż kwadrat liczby nieparzystej przystaje do 1 mod 8:

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 = 8m + 1, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}_0.$$

Zatem y jest również nieparzysta. Wykażemy teraz, że

$$(3) \quad z \equiv \pm 1 \pmod{8}.$$

Jeśli $z = 1$, to (3) oczywiście zachodzi. Gdy $z > 1$, rozpatrujemy dowolny dzielnik pierwszy p liczby z . Mamy $p \neq 2$ oraz z równania (1) wynika kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ponieważ $z \equiv 0 \pmod{p}$, więc $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ na mocy (2). Niech t będzie takie, że $yt \equiv 1 \pmod{p}$. Wówczas

$$(xt)^4 \equiv 2(yt)^4 \equiv 2 \pmod{p},$$

czyli kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie, np. $r = (xt)^2$. Teraz trzeba przywołać słynne twierdzenie z teorii reszt kwadratowych. Jako pierwszy udowodnił je Gauss:

Jeśli $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$, to kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.



Rozwiązanie zadania F 1002.

Gdyby do Ziemi nie docierał strumień energii ze Słońca, to temperatura jej powierzchni miałaby wartość, przy której strumień energii dopływającej z wnętrza Ziemi byłby równy strumieniowi energii wypromieniowanej.

Wartość strumienia ciepła dostarczanego w procesie przewodnictwa cieplnego wynosi

$$q_p = \lambda \frac{dT}{dx},$$

gdzie x oznacza głębokość. Strumień energii wypromieniowanej z powierzchni:

$$q_w = \sigma T^4.$$

Drugie równanie opisuje promieniowanie ciała doskonale czarnego i w przypadku powierzchni ciał „rzeczywistych” jego prawą stronę należy pomnożyć przez zdolność emisyjną powierzchni α . Dla powierzchni Ziemi α jest bliska 1, a dla materiałów tworzących skały powierzchniowe mieści się w granicach $1 > \alpha > 0,2$.

Przyjmijmy $\alpha = 1$ oraz $dT/dx = 30 \text{ K/km}$. Równość obu strumieni energii prowadzi do oszacowania:

$$T = \left(\frac{q_p}{\sigma}\right)^{1/4} \approx 32 \text{ K}.$$

Uwzględnienie zdolności emisyjnej powierzchni wprowadziłoby dodatkowy czynnik równy co najwyżej $5^{1/4} \approx 1,5$, a więc prowadzi do co najwyżej $T \approx 48 \text{ K}$.

Dominującym źródłem energii we wnętrzu Ziemi są najprawdopodobniej rozpady jąder ^{232}Th o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 14 \cdot 10^9$ lat, ^{238}U , $\tau \approx 4,47 \cdot 10^9$ lat oraz ^{40}K , $\tau \approx 1,25 \cdot 10^9$ lat.