Masa efektywna

*Paweł PERKOWSKI**

* Wydział Nowych Technologii i Chemii, Wojskowa Akademia Techniczna

Na początku XX wieku Albert Einstein oparł swoją szczególną teorię względności na dwóch postulatach: pierwszym zdroworozsądkowym, mówiącym o tym, że wszystkie prawa fizyki powinny wyglądać we wszystkich układach inercjalnych tak samo, i drugim eksperymentalnym, stwierdzającym, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych. Te postulaty doprowadziły do sformułowania teorii, w której prędkość światła jest graniczną prędkością, nieosiągalną dla masywnych obiektów. U osoby interesującej się fizyką i jednocześnie sceptycznie podchodzącej do nowych teorii i pomysłów mogła się wówczas pojawić wątpliwość, którą można sformułować w następujący w sposób:

Jeżeli obowiązuje II zasada dynamiki Newtona, która mówi, że przyspieszenie $\vec{a}$, jakie uzyskuje ciało, jest wprost proporcjonalne do siły $\vec{F}$, a odwrotnie proporcjonalne do masy m tego ciała, to powinno ono poruszać się ruchem przyspieszonym pod wpływem działania tej siły. Gdy siła jest stała, to przyspieszenie też musi być stałe.

Ale Einstein twierdzi, że graniczną prędkością niemożliwą do osiągnięcia jest prędkość światła w próżni c. Czyli działanie siły, nawet dowolnie długie, nie pozwoli tej prędkości osiągnąć. Dla dużych prędkości ciało nie przyspiesza tak efektywnie, jak dla małych prędkości. Narzucającym się wytłumaczeniem jest stwierdzenie, że „odczuwalna” bezwładność ciała „w jakiś sposób” wzrasta wraz ze wzrostem prędkości. Dochodzimy tu do pojęcia *masy efektywnej*, która nie jest obca fizyce nierelatywistycznej. Jaki jest jej sens?

W ramach klasycznej dynamiki Newtona, jeżeli jesteśmy w stanie określić ilościowo wszystkie siły, które działają na ciało o masie m, i wyznaczyć wypadkową $\vec{F}_W$ tych sił, to możemy napisać równanie wynikające z II zasady: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_W}{m}$. W niektórych sytuacjach siłę wypadkową możemy rozdzielić na sumę dwóch składowych: $\vec{F}_W = \vec{F} + \vec{F}_O$, gdzie $\vec{F}$ jest przyłożoną (na przykład kontrolowaną przez nas) zewnętrzną siłą, a $\vec{F}_O$ jest siłą oporu. Wówczas wzór, z którego obliczamy przyspieszenie, napisać możemy w postaci: $\vec{a} = \frac{\vec{F}+\vec{F}_O}{m}$. W takim przypadku nie ma potrzeby wprowadzać masy efektywnej – we wzorze jest masa ciała. A co zrobić, jeżeli wiemy, że siły oporu istnieją (i wpływają na przyspieszenie), ale nie możemy ich w sposób jawny zdefiniować i określić w sposób ilościowy?

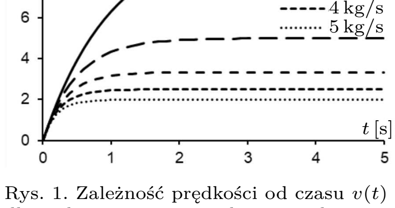
W sytuacji, kiedy mierzone przyspieszenie $\vec{a}_{ex}$ nie jest równe ilorazowi $\frac{\vec{F}}{m}$, wygodnie jest czasem wprowadzić do opisu zjawiska tzw. *masę efektywną* m_{ef}, dobraną tak, aby spełniona była zależność $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F}}{m_{ef}}$. Innymi słowy, masa efektywna to odwrotność współczynnika proporcjonalności pomiędzy siłą zewnętrzną $\vec{F}$ a obserwowanym przyspieszeniem $\vec{a}_{ex}$. Masa efektywna zwykle zależy od czasu (gdy działa na ciało siła zewnętrzna, wywołując np. zmianę prędkości lub zmianę położenia).

Omówimy teraz jeden z wielu przykładów zastosowania pojęcia masy efektywnej w fizyce nierelatywistycznej. W tym przykładzie masa efektywna zależy od prędkości, czyli także zależy od czasu i może przyjmować wartości dodatnie, ujemne i nawet, w pewnym sensie, nieskończone. Załóżmy, że na ciało poruszające się w cieczy o współczynniku oporu η działa siła zewnętrza $\vec{F}$ oraz siła oporu proporcjonalna do prędkości ciała $\vec{v}$ i zwrócona w przeciwną stronę niż prędkość: $\vec{F}_O = -\eta\vec{v}$. Przyspieszenie, jakie uzyskuje ciało, jest równe: $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F}+\vec{F}_O}{m} = \frac{\vec{F}-\eta\vec{v}}{m}$. Porównując to z równaniem $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F}}{m_{ef}}$, dostajemy zależność $m_{ef} = \frac{F}{F-\eta v}m$, gdzie $F = |\vec{F}|$, $v = |\vec{v}|$. Gdy siła $\vec{F}$ zacznie działać, to ciało zacznie przyspieszać, ale z każdą sekundą coraz wolniej, ponieważ mianownik będzie malał. A w konsekwencji masa efektywna będzie rosła. Gdy ciało przyspieszy do prędkości granicznej $v_{gr} = \frac{F}{\eta}$, to mianownik się wyzeruje (siła zewnętrzna będzie równa sile oporu) i ciało, pomimo przyłożonej siły, nie będzie w ogóle

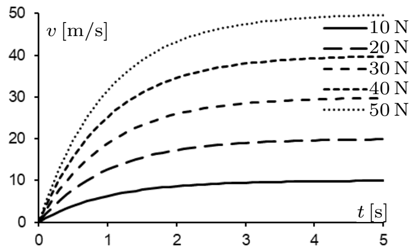
Rozwiązanie zadania M 1641.
Niech N będzie liczbą składającą się w zapisie dziesiętnym z 2^n jedynek. Mamy

$$9N = 10^{2^n} - 1 = \\ = 9\cdot(10+1)(10^2+1)\ldots(10^{2^{n-1}}+1).$$

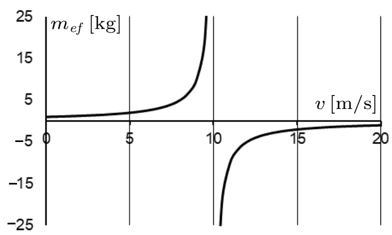
Wystarczy zatem uzasadnić, że liczby $10^{2^k}+1$ i $10^{2^l}+1$ są względnie pierwsze dla $0 \leqslant k < l$. Załóżmy, że obie te liczby są podzielne przez liczbę pierwszą p. Oczywiście liczba p jest nieparzysta. Ponieważ $10^{2^k} \equiv -1 \pmod p$, więc $10^{2^l} \equiv (-1)^{2^{l-k}} = 1 \pmod p$. Skoro jednak p dzieli $10^{2^l}+1$, to $p = 2$, co przeczy wcześniej poczynionej uwadze o nieparzystości p i kończy rozwiązanie zadania.



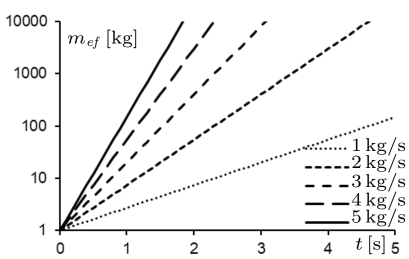
Rys. 1. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$, rozpędzanego stałą siłą $F = 10\,\mathrm{N}$. Każda krzywa odpowiada ośrodkowi o różnym współczynniku oporu: $\eta = 1, 2, 3, 4, 5\,\mathrm{kg/s}$. Początkowo ciało spoczywa $v(0) = 0$, a następnie przyspiesza, osiągając coraz większą prędkość



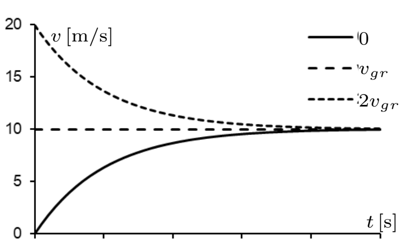
Rys. 2. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$, rozpędzanego stałą siłą $\vec{F}$, poruszającego się w ośrodku o współczynniku oporu $\eta = 1\,\mathrm{kg/s}$. Każda krzywa odpowiada sile o różnej wartości $F = 10, 20, 30, 40, 50\,\mathrm{N}$



Rys. 3. Zależność masy efektywnej od prędkości $m_{ef}(v)$ dla ciała o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$, na które działa siła $F = 10\,\mathrm{N}$. Prędkość graniczna wynosi $v_{gr} = \frac{F}{\eta} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



Rys. 4. Zależność masy efektywnej od czasu $m_{ef}(t)$ w przypadku rozpędzania tego ciała stałą siłą zewnętrzną $F = 10\,\mathrm{N}$. Masa rozpędzanego ciała jest równa $m = 1\,\mathrm{kg}$. Pięć krzywych odpowiada różnym współczynnikom oporu ośrodka $\eta = 1, 2, 3, 4, 5\,\mathrm{kg/s}$. Oś rzędnych jest przedstawiona w skali wykładniczej



Rys. 5. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ rozpędzanego stałą siłą $F = 10\,\mathrm{N}$. Każda krzywa odpowiada różnej prędkości początkowej $v(0) = 0, v_{gr}, 2v_{gr}$

przyspieszać. Oznacza to nieskończoną bezwładność (efektywną) tego ciała. Jeżeli prędkość ciała będzie większa od prędkości granicznej, to mianownik będzie ujemny ($F < \eta v$). Oznaczać to będzie ujemną masę efektywną! Wynika to z faktu, że pomimo przyłożenia siły w kierunku ruchu ciało będzie zwalniać. Oczywiście proces hamowania będzie trwał do wyzerowania się mianownika i od tej chwili prędkość pozostanie stała, praktycznie równa wartości granicznej.

Na rysunku 1 przedstawiono zależności prędkości od czasu dla ciała, na które działa stała siła, które porusza się w ośrodkach o różnych współczynnikach oporu. Widzimy, że większy współczynnik skutkuje tym, że ciało szybciej dochodzi do prędkości granicznej (najniższa krzywa na wykresie). Jednocześnie widać, że im większy opór (większy współczynnik oporu), tym mniejsza prędkość graniczna.

Na rysunku 2 przedstawiono zależności prędkości od czasu dla ciała poruszającego się w ośrodku o ustalonym współczynniku oporu, ale dla różnych wartości stałej siły zewnętrznej. Analizując wykres, widzimy, że proces rozpędzania jest tak samo rozłożony w czasie dla wszystkich wartości siły przyspieszającej. Prędkość graniczna v_{gr}, jaką osiąga przyspieszane ciało, jest proporcjonalna do działającej siły – co widzimy na wykresie.

Na wykresie 3 przedstawiono zależność masy efektywnej m_{ef} od prędkości ciała. Widzimy, że masa efektywna wzrasta od masy spoczynkowej i dąży do nieskończoności, gdy prędkość zbliża się do wartości granicznej $v_{gr} = F/\eta$. Masa efektywna może mieć także wartość ujemną. Dzieje się tak, gdy „wstrzelimy" ciało w ośrodek lepki, czyli kiedy ciało w początkowym momencie ruchu wpadnie w ośrodek z prędkością spełniającą warunek $v > v_{gr}$. Wówczas, pomimo stałej siły zewnętrznej działającej w kierunku ruchu, ciało efektywnie hamuje – stąd pojawia się ujemna masa efektywna. Ten proces trwa aż do momentu, gdy ciało zwolni do prędkości granicznej. Dalej porusza się ruchem jednostajnym.

Na rysunku 4 przedstawiono zależności masy efektywnej od czasu przy rozpędzaniu analizowanym na wykresie 1, czyli dla różnych wartości współczynnika oporu. Widzimy, że masa efektywna rośnie najszybciej w przypadku ośrodka stawiającego największy opór poruszającemu się ciału.

Analityczne prędkości ciała w funkcji czasu, na podstawie którego zostały wykreślone wykresy 1, 2 i 4, ma postać: $v(t) = \frac{F}{\eta}\left(1 - e^{-\frac{\eta}{m}t}\right)$. Jest to rozwiązanie prawdziwe dla ciała spoczywającego w chwili początkowej.

Na rysunku 5 przedstawiono trzy wykresy obrazujące zależność prędkości w funkcji czasu. Trzy krzywe na rysunku różnią się prędkością początkową, z jaką ciało wpada w ośrodek. Krzywa najniższa odpowiada zerowej prędkości początkowej. Krzywa pozioma odpowiada sytuacji, w której ciało wpada z prędkością początkową równą prędkości granicznej $v = v_{gr}$. Krzywa najwyższa obrazuje prędkość w funkcji czasu w sytuacji, kiedy prędkość początkowa jest większa od prędkości granicznej $v = 2\,v_{gr}$. Widzimy, że przy małej (lub zerowej) prędkości początkowej ciało się rozpędza, dochodząc asymptotycznie do prędkości granicznej. W tym przypadku masa efektywna jest dodatnia i wzrasta z czasem do nieskończoności. Przy prędkości początkowej równej prędkości granicznej ciało ani nie przyspiesza, ani nie hamuje, jego masa efektywna jest, w pewnym sensie, nieskończona od samego początku ruchu. W przypadku początkowej prędkości większej od granicznej masa efektywna jest ujemna i wraz z dochodzeniem do prędkości granicznej dąży do $-\infty$.

Z przedstawionego przykładu widzimy, że może się zdarzyć w fizyce małych prędkości, że będziemy chcieli przyspieszyć ciało, a ono będzie się tak zachowywało, jakby miało nieskończoną masę efektywną. Czyli tak, jak to jest w fizyce dużych (relatywistycznych) prędkości. Na zakończenie zadajmy sobie pytanie, czy w fizyce relatywistycznej dla dużych prędkości ujawnia się jakaś tajemnicza siła, która przeciwstawia się dalszemu wzrostowi prędkości – tak jak jest to pokazane w powyższym przykładzie? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Efekt wzrostu masy efektywnej w fizyce relatywistycznej nie polega na pojawieniu się takiej „tajemniczej" siły przeciwstawiającej się wzrostowi prędkości, ale to już jest zupełnie inna historia…