Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 789 ($WT = 1{,}93$) i 790 ($WT = 2{,}68$) z numeru 11/2019

Mikołaj Pater	Opole	43,11
Janusz Fiett	Warszawa	42,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,79
Paweł Burdzy	Warszawa	35,34
Jakub Węgrecki	Kraków	33,71
Marek Spychała	Warszawa	33,34
Łukasz Merta	Kraków	32,54
Błażej Żmija	Kraków	32,29

W rocznym omówieniu sezonu ligowego (Δ^2_{20}), w opublikowanej rozszerzonej czołówce („Lista uczestników…”) zostało omyłkowo pominięte nazwisko Karol Matuszewski ze stanem konta 15,79 (po zadaniach z Δ^6_{19}). Za niedopatrzenie przepraszamy.

Zadania z matematyki nr 803, 804

Redaguje Marcin E. KUCZMA

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $\lfloor ax + b\rfloor = \lfloor bx + a\rfloor$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji $(x_1, \ldots, x_p)$ zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \equiv r \pmod p.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

Zadanie 804 zaproponował pan Semen Słobodianiuk

Rozwiązania zadań z numeru 2/2020

Przypominamy treść zadań:

795. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{\frac{x_{n-1} + x_n}{2x_{n-1}}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Uzasadnić zbieżność i wyznaczyć granicę tego ciągu.

796. Dane są liczby całkowite $m > n > 1$, przy czym m jest liczbą parzystą. Udowodnić, że równanie

$$x^m + y^m = (x + y)^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

795. Z definicji ciągu (x_n) wynika (przez oczywistą indukcję), że wszystkie jego wyrazy są dobrze określonymi liczbami dodatnimi. Weźmy pod uwagę ilorazy $t_n = x_n/x_{n-1}$; ciąg liczb dodatnich $t_1, t_2, t_3, \ldots$ z wyrazem początkowym $t_1 = 1/\sqrt{2}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$(1) \qquad t_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + t_n}{2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pokażemy, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi równość

$$(2) \qquad t_n = \cos\alpha_n, \quad \text{gdzie } \alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\,.$$

Uzasadnienie indukcyjne: dla $n = 1$ tak jest. Przyjmijmy równość $t_n = \cos\alpha_n$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Ponieważ $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$, mamy wówczas

$$t_n = \cos(2\alpha_{n+1}) = 2(\cos\alpha_{n+1})^2 - 1;$$

stąd (wobec spostrzeżenia, że $\cos\alpha_{n+1} > 0$):

$$\cos\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + t_n}{2}}\,.$$

W połączeniu ze wzorem (1) daje to równość (2) z n zastąpionym przez $n{+}1$, czyli tezę indukcyjną.

Wzór (2) został wykazany. Wywnioskujemy z niego, że

$$(3) \qquad x_n = \frac{1}{2^n \sin\alpha_n}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Znów indukcja: dla $n = 1$ zgadza się (bo $\alpha_1 = \pi/4$). Ustalmy $n \geqslant 2$ i przyjmijmy słuszność (3) z n zastąpionym przez $n{-}1$. Z takiego założenia indukcyjnego i ze wzoru (2) otrzymujemy

$$x_n = t_n x_{n-1} = (\cos\alpha_n)\cdot\frac{1}{2^{n-1}\sin\alpha_{n-1}} = \frac{\cos\alpha_n}{2^{n-1}\sin(2\alpha_n)} = \frac{1}{2^n \sin\alpha_n}\,,$$

co kończy indukcyjny dowód wzoru (3). Tak więc

$$\frac{1}{x_n} = 2^n \sin\alpha_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^{n+1}}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{gdy } n \to \infty$$

(bo $(\sin x)/x \to 1$ przy $x \to 0$). Stąd, ostatecznie, $x_n \to 2/\pi$.

796. Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x, y spełniają podane równanie. Oznaczmy przez d ich największy wspólny dzielnik; tak więc $x = ud$, $y = vd$, gdzie u, v to liczby naturalne względnie pierwsze. Wstawiając to do równania i dzieląc stronami przez d^n, otrzymujemy

$$(4) \qquad d^{m-n}(u^m + v^m) = (u + v)^n.$$

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $u^m + v^m$. Wobec związku (4) p jest też dzielnikiem sumy $u + v$. To znaczy, że $u \equiv -v \pmod p$; a skoro m jest liczbą parzystą, mamy stąd $u^m \equiv v^m \pmod p$, i dalej

$$2u^m \equiv u^m + v^m \equiv 0 \pmod p.$$

Liczba u nie dzieli się przez p (bo $p \mid u + v$, zaś u, v są względnie pierwsze); zatem $p = 2$.

Skoro $u^m + v^m$ nie ma innych dzielników pierwszych, znaczy to, że

$$(5) \qquad u^m + v^m = 2^l \quad \text{dla pewnego } l \in \mathbb{N}.$$

Zatem liczby u i v (względnie pierwsze) są obie nieparzyste; stąd $u^m \equiv v^m \equiv 1 \pmod 4$, bo m jest liczbą parzystą. W równości (5) mamy więc $l = 1$, skąd $u = v = 1$. Wracamy do równania (4): $d^{m-n}\cdot 2 = 2^n$. To pokazuje, że $d = 2^k$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$); przy tym $2^{k(m-n)}\cdot 2 = 2^n$, czyli $k(m - n) = n - 1$: liczba $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

Na odwrót, załóżmy, że $n - 1 = k(m - n)$ dla pewnego k. Wówczas para $x = y = 2^k$ jest rozwiązaniem zadanego równania:

$$x^m + y^m = 2\cdot 2^{km} = 2\cdot 2^{kn+n-1} = 2^{n(k+1)} = (x + y)^n.$$

Uzyskaliśmy żądaną równoważność.

Klub 44 F

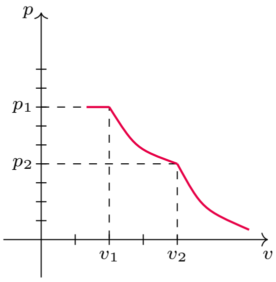
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2020

Zadania z fizyki nr 700, 701

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

700. Jedna okładka powietrznego kondensatora płaskiego o pojemności c jest nienaładowana, druga jest naładowana ładunkiem q. Okładki połączono przewodnikiem o dużym oporze. Ile ciepła wydzieli się w przewodniku po długim czasie? Rozmiary okładek kondensatora są bardzo duże w porównaniu z odległością między nimi.

701. Mieszanina gazów złożona z $m_N = 100$ g azotu oraz nieznanej masy tlenu została poddana sprężaniu izotermicznemu w temperaturze $T = 74{,}4$ K. Wykres zależności ciśnienia tej mieszaniny od jej objętości przedstawia rysunek 1. Znaleźć masę tlenu oraz ciśnienie pary nasyconej tlenu w temperaturze T. Przy ciśnieniu normalnym T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu, a tlen wrze w wyższej temperaturze.



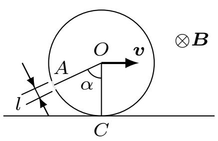
Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 2/2020

Przypominamy treść zadań:

692. W jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są poziome, a wartość wektora indukcji wynosi B, toczy się bez poślizgu z prędkością v cienki metalowy pierścień, w którym jest bardzo mała przerwa o długości l. Wektor $\boldsymbol{B}$ jest prostopadły do płaszczyzny pierścienia (rys. 2). Znaleźć SEM indukcji w chwili, gdy promień pierścienia trafiający w rozcięcie tworzy z pionem kąt α.

693. Cienkościenny cylinder o masie M i wysokości H, którego pole podstawy wynosi S, wypełniony jest gazem doskonałym i pływa w wodzie. W wyniku utraty hermetyczności w dolnej części cylindra, jego głębokość zanurzenia zwiększyła się o ΔH. Jakie było ciśnienie początkowe gazu w cylindrze? Ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0, temperatura nie zmienia się.



Rys. 2

692. Gdyby pierścień był zamknięty, nie zmieniałby się strumień pola magnetycznego przez ograniczoną przez niego powierzchnię i SEM indukcji byłaby równa zeru. Zatem szukana siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_0$ w przerwanym pierścieniu spełnia równanie

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

gdzie $\mathcal{E}_1$ jest siłą elektromotoryczną, jaka powstaje w elemencie o długości l, uzupełniającym przerwę w pierścieniu. Prędkość u tego elementu jest sumą prędkości ruchu postępowego i obrotowego (rys. 3) i ma wartość

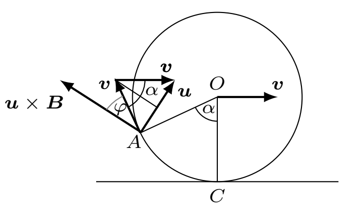
$$u = 2v\sin(\alpha/2).$$

Siła Lorentza działająca na jednostkowy ładunek w tym elemencie dana jest wzorem

$$\boldsymbol{F}_L/q = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$$

i tworzy kąt $\varphi = \alpha/2$ ze styczną do pierścienia. Siła elektromotoryczna $\mathcal{E}_1$ jest pracą wykonaną przez siłę Lorentza nad jednostkowym ładunkiem na drodze l, zatem

$$\mathcal{E}_1 = uBl\cos\varphi = 2vBl\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = Bvl\sin\alpha.$$



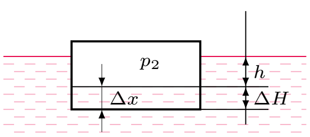
Rys. 3

Potencjał wzdłuż odcinka o długości l rośnie w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara. Szukana siła elektromotoryczna indukcji w rozerwanym pierścieniu dana jest wzorem

$$\mathcal{E}_0 = Bvl\sin\alpha.$$

693. Oznaczmy przez h początkową głębokość zanurzenia cylindra, a przez Δx wysokość słupa wody, która wciekła do naczynia po utracie hermetyczności. Zgodnie z prawem Archimedesa $Mg = \rho ghS$, gdzie ρ jest gęstością wody. Stąd $h = M/\rho S$. W stanie końcowym:

$$Mg + \rho gS\Delta x = \rho gS(h + \Delta H),$$



Rys. 4

zatem $\Delta x = \Delta H$ (rys. 4). Warunek równowagi ciśnień na głębokości h ma postać:

$$p_2 = p_0 + \rho gh = p_0 + Mg/S,$$

gdzie p_2 jest ciśnieniem gazu w naczyniu w stanie końcowym. Oznaczając szukane ciśnienie początkowe przez p_1, z prawa przemiany izotermicznej otrzymujemy:

$$p_1 = p_2(1 - \Delta x/H) = (p_0 + Mg/S)(1 - \Delta H/H).$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.