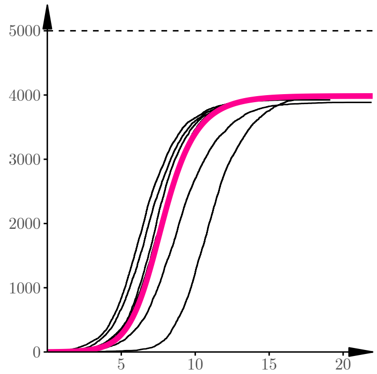


Rys. 6. Liczba wszystkich dotychczas zainfekowanych. Przerywaną linią oznaczono rozmiar populacji. We wszystkich symulowanych przebiegach po wygaśnięciu epidemii około 1000 osób pozostaje w stanie S (są to osoby, które nie zostały zarażone)

Początkowo trajektorie zachowują się tak, jak w modelu poprzednim: najpierw sporo losowych fluktuacji, później następuje faza wykładniczego wzrostu. Jeszcze później widać zupełnie inne zjawisko: hamowania wzrostu wskutek spadku liczby narażonych $S(t)$, aż do zupełnego wygaśnięcia epidemii.

Dla różnych realizacji tego samego procesu SIR widać duże przesunięcia w fazie, wynikające z losowego charakteru początkowego fragmentu. Losowe fluktuacje (głównie początkowe) mają też pewien (niewielki) wpływ na maksymalną liczbę zarażonych (maksima poszczególnych krzywych).

W opracowaniach dotyczących rozwoju epidemii często przedstawia się również liczbę wszystkich osób, które zostały zainfekowane do danego momentu (tzn. liczbę zdarzeń polegających na zarażeniu nowej osoby). Liczba ta odpowiada procesowi $\ell - S(t)$, widocznemu na rysunku 6. Warto zwrócić uwagę na niewielkie fluktuacje liczby wszystkich osób, które zostały zakażone do czasu wygaśnięcia epidemii.

Przedstawione w tym artykule modele rozwoju epidemii są skrajnie uproszczone i nie nadają się do ilościowego opisu rzeczywistego zjawiska. Niemniej nawet takie modele pozwalają trochę zrozumieć mechanizm epidemii na poziomie jakościowym.

Dlaczego czasy oczekiwania na skok mają rozkład wykładniczy?

Aby udowodnić, że zmienna W ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, wystarczy pokazać, że zmienna $e^{-\lambda W}$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$, tzn. że dla dowolnego $t>0$: $\mathbb{P}(W<t)=\mathbb{P}(e^{-\lambda W}>e^{-\lambda t})=1-e^{-\lambda t}$.
Przyjrzyjmy się czasowi *pierwszego* skoku, $W_1=T_1=\inf\{t: I(t)\neq i_0\}$. Nietrudno uwierzyć, że

$$\mathbb{P}(W_1\leqslant t+h|W_1>t)=\mathbb{P}(I(t+h)\neq i_0|I(t)=i_0)+o(h)=(\alpha+\beta)i_0h+o(h),$$

gdzie druga równość wynika z (2). Jeśli $F(t)=\mathbb{P}(W_1\leqslant t)$, to dostajemy stąd równanie $\frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}=(\alpha+\beta)i_0h+o(h)$, zatem $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(1-F(t))=\frac{(1-F(t))'}{1-F(t)}=-(\alpha+\beta)i_0t$, skąd wnioskujemy, że $1-F(t)=\exp\{-(\alpha+\beta)i_0t\}$. Identyczne rozumowanie stosuje się do W_{n+1} i prowadzi ono do analogicznego rezultatu, z i_0 zastąpionym przez i_n.

Fibonacci spotyka Banacha

*Jarosław GÓRNICKI**

* Politechnika Rzeszowska

Fibonacci (właściwie Leonardo z Pizy, ok. 1170–1240) nauczył się zasad arytmetyki hindusko-arabskiej, gdy razem z ojcem przebywał w Bougie (obecnie algierska Bidżaja). Poszerzał swoją wiedzę podczas podróży do Egiptu, Syrii, Grecji, na Sycylię, do Prowansji. Gdy osiadł w Pizie, w 1202 roku napisał traktat *Liber Abaci* (Księga rachunków), z myślą o rozpowszechnieniu w Europie notacji dziesiętnej opartej na wykorzystaniu cyfr $0,1,2,\ldots,9$. Pokazał w nim użyteczność nowych metod na wielu przykładach rachunkowych, szczególnie związanych z przeliczaniem miar i wag, obliczaniem zysków i odsetek, wymianą pieniędzy. W 1225 roku napisał rozprawę *Liber Quadratorum*, która miała być kontynuacją *Arytmetyki* Diofantosa. Problemy rozważane przez Leonarda nie są banalne. Przekonujemy się o tym, rozwiązując zadania zamieszczone w jego tekstach:

1. *Znaleźć liczbę wymierną x taką, że liczby $x-5$, x oraz $x+5$ są kwadratami.*
   [Najmniejszym rozwiązaniem jest: $x=\frac{1681}{144}=\left(\frac{41}{12}\right)^2$, $x-5=\frac{961}{144}=\left(\frac{31}{12}\right)^2$, $x+5=\frac{2401}{144}=\left(\frac{49}{12}\right)^2$.]
2. *Wybrać pięć odważników tak, aby można było na wadze szalkowej zważyć każdy ładunek o masie $1,2,3,\ldots,30$, jeżeli podczas ważenia odważniki można układać tylko na jednej szalce.*
   [Odpowiedź: $1,2,4,8,16$.]
3. *Wybrać możliwie najmniej odważników tak, aby na wadze szalkowej można było zważyć każdy ładunek o masie $1,2,3,\ldots,30$.*
   [Odpowiedź: $1,3,9,27$.]
4. *Ile będzie po roku par królików, które urodzą się jako potomstwo jednej pary, jeśli każda para wydaje na świat co miesiąc nową parę, zdolną z kolei po miesiącu do rozmnażania, i jeśli żadna para w tym czasie nie ginie?*
   [Odpowiedź: 377.]

Choć traktat *Liber Abaci* przyczynił się do rozwoju bankowości i rachunkowości w Europie, to największą sławę przyniósł Fibonacciemu niezwykły ciąg

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots,$$

wykorzystany w rozwiązaniu zadania 4. Wcześniej, w VI wieku, ciąg ten został opisany przez matematyków hinduskich (Virahanka), ale wtedy nie wzbudził zainteresowania.

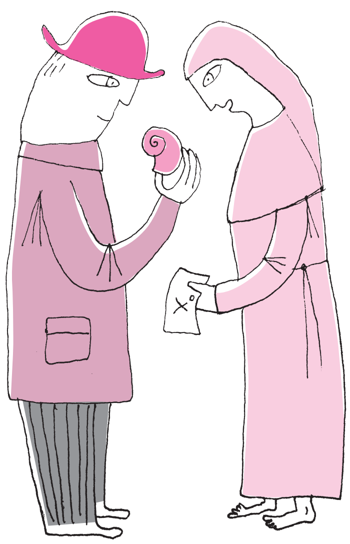
Ciągiem Fibonacciego $\{F_n\}$, o generatorach $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, nazywamy ciąg, którego kolejne wyrazy spełniają równość $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$.

Ciągi z rodziny Fibonacciego (otrzymane dla różnych generatorów, przy rozmaitych modyfikacjach formuły na obliczanie wartości F_n) budzą wiele emocji u matematyków oraz miłośników matematyki rekreacyjnej. Dzieje się tak za sprawą odkrywania obecności ciągu Fibonacciego w naszym otoczeniu (np. w botanice), w sztuce – *złota proporcja*, w zastosowaniach ciągu Fibonacciego w teorii liczb.

Nie wszystko o nim wiemy: w ciągu Fibonacciego występują liczby pierwsze $2, 3, 5, 13, 89, 233, \ldots$, ale czy liczb pierwszych jest w nim nieskończenie wiele?

W 1611 roku Johannes Kepler w pracy *Strena, Seu de Nive Sexangula*, o sześciokątnych płatkach śniegu, ponownie odkrył ciąg Fibonacciego i **zgadł**, że kolejne proporcje $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, czyli stosunki $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\ldots$, bardzo szybko, choć raz z lewej, raz z prawej strony, zbliżają się do wartości $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803\ldots$ Liczba ta, zwana *złotą proporcją*, od Starożytności była wykorzystywana w sztuce, zwłaszcza w architekturze jako „reguła piękna” – wielkości, których stosunek jest równy φ, mają się wyróżniać przyjemną estetyką.

Gdy wiemy, że w przedziale domkniętym na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny, to spostrzeżenie Keplera możemy uzasadnić w oparciu o twierdzenie Stefana Banacha o punkcie stałym z 1922 roku.



Twierdzenie. *Niech $T : [a, b] \to [a, b]$ silnie zbliża każdą parę punktów (istnieje $M < 1$, że $|Tx - Ty| \leqslant M|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in [a, b]$). Wtedy istnieje dokładnie jeden taki punkt $u \in [a, b]$, że $u = Tu$.*

Uzasadnienie jest łatwe. Gdyby $u = Tu \neq Tv = v$, to otrzymamy sprzeczność,

$$0 < |u - v| = |Tu - Tv| \leqslant M|u - v| < |u - v|.$$

Zatem jeśli punkt stały istnieje, to dokładnie jeden. Weźmy dowolne $x_0 \in [a, b]$ i utwórzmy ciąg $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Wówczas

$$|x_{n+1} - x_n| = |T^{n+1}x_0 - T^n x_0| \leqslant M|T^n x_0 - T^{n-1}x_0| \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant M^n|Tx_0 - x_0| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Ponieważ

$$|x_{n+k} - x_n| \leqslant |x_{n+k} - x_{n+k+1}| + |x_{n+k+1} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{n+k} - x_{n+k+1}| + M|x_{n+k} - x_n| + |x_{n+1} - x_n|,$$

więc

$$|x_{n+k} - x_n| \leqslant \frac{1}{1 - M}\{|x_{n+k+1} - x_{n+k}| + |x_{n+1} - x_n|\} \to 0, \text{ gdy } n \to \infty,$$

a to oznacza, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego i $x_n \to u \in [a, b]$. Warunek $x_n = Tx_{n-1}$, $n \geqslant 1$, oraz ciągłość przekształcenia T zapewniają, że $u = Tu$.

Zastosowanie. Z warunku $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$ mamy

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}.$$

Zależność tę możemy zapisać w postaci

$$x_n = Tx_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \text{ gdzie } x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Zauważmy, że dla funkcji $T : \left[\frac{3}{2}, 2\right] \to \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ danej wzorem $Tx = 1 + \frac{1}{x}$ mamy

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|xy|}|x - y| \leqslant \frac{4}{9}|x - y|, \text{ gdy } x, y \in \left[\frac{3}{2}, 2\right].$$

Zatem z twierdzenia Banacha ciąg $y_0 = \frac{3}{2}$, $y_n = Ty_{n-1}$, $n \geqslant 1$ jest zbieżny do wartości $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, która jest pierwiastkiem równania $x = 1 + \frac{1}{x}$ w przedziale $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Ponieważ $y_n = \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}$, $n \geqslant 1$, więc $\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \varphi$, gdy $n \to \infty$.

Opisana metoda (gdy trafnie dobierzemy zakres działania odpowiedniego przekształcenia T) jest skuteczna w badaniu granicznych zachowań takich ilorazów również dla innych przedstawicieli z rodziny ciągów Fibonacciego.

Dobre bajki nigdy się nie kończą...

Rozwiązanie zadania M 1639.
Załóżmy, że funkcja f spełnia warunki zadania. Niech $P(x, y)$ oznacza nierówność $f(x + y) + y \leqslant f(f(f(x)))$. Wybierzmy dowolnie $x, y \in \mathbb{R}$. Ponieważ $P(x, f(f(x)) - x)$, więc $f(f(x)) \leqslant x$. Podstawiając w ostatniej nierówności $f(x)$ zamiast x i uwzględniając $P(x, y)$, dostajemy $f(x + y) + y \leqslant f(x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Podstawiając $y - x$ zamiast y, dostajemy $f(y) + y \leqslant f(x) + x$. Z dowolności x, y wnioskujemy, że $f(y) + y = f(x) + x = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ i wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, zatem musi być $f(x) = a - x$. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja faktycznie spełnia $P(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.