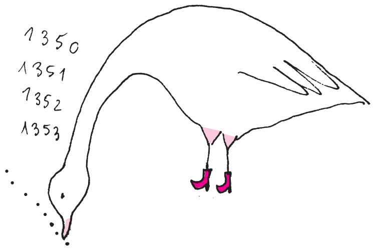

gdzie $A_{k+2n} = A_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$. Innymi słowy, $f(i)$ jest różnicą długości części, na które dzielą obwód wielokąta punkty A_i oraz A_{i+n}. Ponieważ

$$f(i) = 2 \cdot (A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + \ldots + A_{i+n-1}A_{i+n}) - \ell$$

(gdzie ℓ jest obwodem danego wielokąta), to $f(i)$ jest liczbą parzystą. Ponadto mamy

$$|f(i+1) - f(i)| = |2 \cdot A_{i+n}A_{i+n+1} - 2 \cdot A_iA_{i+1}| = 2 \cdot |A_{i+n}A_{i+n+1} - A_iA_{i+1}| \leqslant 2.$$

Zachodzi także równość $f(i) = -f(i+n)$. Stąd wynika, że ciąg liczb

$$f(1), f(2), \ldots, f(n) \text{ oraz } f(n+1) = -f(1)$$

składa się z liczb parzystych, a jego kolejne wyrazy różnią się nie więcej niż o 2. Zatem istnieje takie i, że $f(i) = 0$, czyli punkty A_i oraz A_{i+n} dzielą obwód danego wielokąta na dwie części o jednakowej długości.

Na koniec proponujemy Czytelnikom dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. *Niech n, p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg liczb całkowitych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ spełnia warunki:*

$$x_0 = x_n \quad \textit{oraz} \quad x_{i+1} - x_i \in \{p, -q\}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Udowodnić, że jeżeli $n > p + q$, to istnieją takie k, ℓ, że $k \neq \ell$ i $\{k, \ell\} \neq \{0, n\}$ oraz $x_k = x_\ell$.

Zadanie 6. *Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części, z których każda zawiera taką samą liczbę odcinków długości 2 i taką samą liczbę odcinków długości 3.*

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1636. Udowodnić, że nie istnieją takie nieparzyste liczby x, y, z, że

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (z+x)^2.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1637. W międzyszkolnym turnieju gry w warcaby każda para uczestników z różnych szkół rozegrała jedną partię; jeśli uczestnicy pochodzili z tej samej szkoły, nie grali ze sobą. *Singlem* nazwiemy każdy mecz rozegrany przez uczestników tej samej płci, a *miksem* – przez uczestników płci przeciwnej. Na koniec turnieju okazało się, że liczba dziewczynek biorących udział w turnieju różni się o co najwyżej 1 od liczby chłopców. Podobnie, liczba rozegranych singli różniła się o co najwyżej 1 od liczby miksów. Udowodnić, że liczba szkół, z których startowały różne liczby chłopców i dziewcząt, nie przekracza 3.
Rozwiązanie na str. 19

M 1638. Wielomian $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami). Wiedząc, że $a_{n-1} = -n$ i $a_{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, wyznaczyć a_i dla $0 \leqslant i \leqslant n-3$.
Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 999. Jednorodnemu walcowi o masie m i promieniu r nadano prędkość kątową ω_0 wokół osi symetrii obrotowej i położono na poziomej podłodze. Przyspieszenie ziemskie wynosi g, a współczynnik tarcia kinetycznego między podłogą i powierzchnią walca wynosi μ. Po jakim czasie τ walec przestanie się ślizgać i zacznie się toczyć ze stałą prędkością kątową? Jaką pracę W wykona siła tarcia? Wskazówka: moment bezwładności I jednorodnego walca, o promieniu r i masie m, wokół jego osi symetrii wynosi: $I = mr^2/2$.
Rozwiązanie na str. 14

F 1000. Przeciętne oko ludzkie rejestruje światło o długościach fali λ mieszczących się w zakresie 380 nm $< \lambda <$ 740 nm. Ile linii widma wodoru człowiek może zaobserwować bezpośrednio? Stała Plancka wynosi $h = 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV$\cdot$s, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, a stała Rydberga $R = 13{,}606$ eV.
Rozwiązanie na str. 15