Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2020

Zadania z matematyki nr 801, 802

Redaguje Marcin E. KUCZMA

801. Na przyprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC został dowolnie wybrany punkt D. Symetralna odcinka CD przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do P względem środka M odcinka AB. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu Q na prostą DP. Udowodnić, że M leży na dwusiecznej kąta PCR.

802. Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb x spełniających równanie $\operatorname{tg} x = x$. Niech $y_n = \big(n + \frac{1}{2}\big)\pi - x_n$. Obliczyć granicę ciągu (ny_n) przy $n \to \infty$ (lub wykazać, że granica nie istnieje).

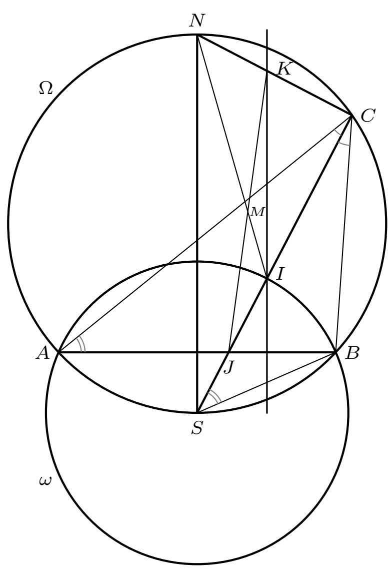
Zadanie 802 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2020

Przypominamy treść zadań:

793. Okręgi Ω i ω przecinają się w punktach A i B. Środek S okręgu ω leży na okręgu Ω i jest końcem jego średnicy NS. Cięciwa CS okręgu Ω, niebędąca średnicą, przecina okrąg ω oraz odcinek AB odpowiednio w punktach I oraz J. Prosta przechodząca przez I, równoległa do NS, przecina odcinek NC w punkcie K. Dowieść, że prosta IN przechodzi przez środek odcinka JK.

794. Dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant 0$ przyjmijmy: $R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $Q(x,y,z) = \sqrt{xy+xz+yz}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia
$$\frac{1}{R(a,b,c)Q(b,c,d)} + \frac{1}{R(b,c,d)Q(a,c,d)} + \frac{1}{R(a,c,d)Q(a,b,c)}$$
dla liczb $a, b, c, d \geqslant 0$ spełniających warunek $2a+2b+3c+2d \leqslant 6$ oraz wyznaczyć wszystkie czwórki (a,b,c,d), dla których to minimum jest osiągane.



793. Odcinek CS połowi kąt BCA. Leżący na nim punkt I spełnia warunek $|SI| = |SA| = |SB|$, charakteryzujący środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Trójkąt SCB jest podobny do ACJ (równe kąty przy wierzchołkach S, A oraz C, C). Otrzymujemy następujący ciąg proporcji (pierwsza z nich zachodzi, bo AI jest dwusieczną kąta A w trójkącie BAC; druga wynika ze wspomnianego podobieństwa; a ostatnia z równoległości $KI \| NS$):
$$\frac{|CI|}{|IJ|} = \frac{|CA|}{|AJ|} = \frac{|CS|}{|SB|} = \frac{|CS|}{|SI|} = \frac{|CN|}{|NK|}.$$
Niech M będzie punktem przecięcia prostych IN i JK. Wystarczy teraz zastosować twierdzenie Menelausa do trójkąta CJK przeciętego prostą IN:
$$\frac{|CI|}{|IJ|} \cdot \frac{|JM|}{|MK|} \cdot \frac{|KN|}{|NC|} = 1.$$
W tym iloczynie skrajne czynniki dają (po wymnożeniu) wartość 1.
Zatem $|JM| = |MK|$.

794. Rozważane wyrażenie oznaczmy literą W (stale zakładamy, że wszystkie mianowniki są dodatnie). Dwukrotnie stosujemy nierówność między średnimi (po drodze przegrupowując czynniki):
$$W \geqslant 3\left(\frac{1}{R(a,b,c)Q(b,c,d)} \cdot \frac{1}{R(b,c,d)Q(a,c,d)} \cdot \frac{1}{R(a,c,d)Q(a,b,c)}\right)^{1/3} =$$
$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{R(a,b,c)Q(a,b,c)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(b,c,d)Q(b,c,d)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(a,c,d)Q(a,c,d)}}\right)^{2/3} \geqslant$$
$$\geqslant 3\left(\frac{3}{\sqrt{R(a,b,c)Q(a,b,c)} + \sqrt{R(b,c,d)Q(b,c,d)} + \sqrt{R(a,c,d)Q(a,c,d)}}\right)^2.$$
Ponownie używając nierówności między średnimi (wartości R^2 i $2Q^2$), dostajemy oszacowanie
$$R(a,b,c)Q(a,b,c) \leqslant \frac{R(a,b,c)^2 + 2Q(a,b,c)^2}{2\sqrt{2}} = \frac{(a+b+c)^2}{2\sqrt{2}},$$
czyli $\sqrt{R(a,b,c)Q(a,b,c)} \leqslant 2^{-3/4}(a+b+c)$. Stąd i z analogicznego oszacowania dla trójek (b,c,d), (a,c,d) uzyskujemy kontynuację wcześniejszego ciągu nierówności:
$$W \geqslant 3\left(\frac{3 \cdot 2^{3/4}}{(a+b+c)+(b+c+d)+(a+c+d)}\right)^2 = \frac{3^3 \cdot 2^{3/2}}{(2a+2b+3c+2d)^2} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$$
(bo $2a+2b+3c+2d \leqslant 6$ z założenia). Znaleziona wartość zostaje osiągnięta, gdy

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 787 ($WT = 2{,}26$) i 788 ($WT = 1{,}82$) z numeru 10/2019

Krzysztof Kamiński	Pabianice	44,12
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Fiett	Warszawa	39,41
Mikołaj Pater	Opole	38,50
Paweł Burdzy	Warszawa	35,34
Zbigniew Skalik	Wrocław	33,86
Jakub Węgrecki	Kraków	32,16

Oto kolejny Weteran Klubu 44M: pan Krzysztof Kamiński zalicza 44 p. po raz trzeci.

wszystkie nierówności stają się równościami; więc gdy $2a+2b+3c+2d=6$ oraz

$$\sqrt{R(a,b,c)Q(a,b,c)} = 2^{-3/4}(a+b+c), \qquad \sqrt{R(b,c,d)Q(b,c,d)} = 2^{-3/4}(b+c+d),$$
$$\sqrt{R(a,c,d)Q(a,c,d)} = 2^{-3/4}(a+c+d),$$

przy czym te trzy wartości też muszą być równe(!). To wymusza równości $a=b=d$ oraz $6a+3c=6$. Ponadto – oznaczając krótko $R(a,b,c)=R(b,c,d)=R(a,c,d)=R$ (i podobnie Q) – musimy mieć równość $R^2=2Q^2$ (do takiej pary też była stosowana nierówność między średnimi) – czyli $2a^2+c^2=4ac+2a^2$. Wraz z równością $6a+3c=6$ daje to alternatywę: $a=1$, $c=0$ lub $a=\frac{1}{3}$, $c=\frac{4}{3}$. Dla czwórek $(a,b,c,d)=(1,1,0,1)$ oraz $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ wyznaczone oszacowanie $W \geqslant 3/\sqrt{2}$ przechodzi w równość. Zatem szukane minimum wynosi $3/\sqrt{2}$.

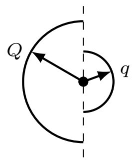
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2020

Zadania z fizyki nr 698, 699

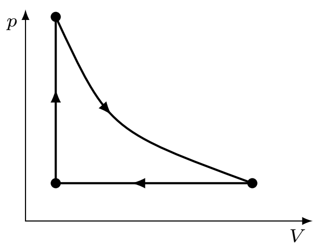
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

698. Znaleźć siły oddziaływania dwóch nieprzewodzących półsfer o promieniach R i r, naładowanych odpowiednio ładunkami Q i q, rozłożonymi równomiernie na powierzchniach półsfer. Środki półsfer oraz płaszczyzny ich maksymalnych przekrojów pokrywają się (rys. 1).



Rys. 1

699. Cykl termodynamiczny składa się z izotermy, izobary oraz izochory (rys. 2). Gaz poddawany przemianom jest doskonały, jednoatomowy. Na izotermie gaz pobiera ciepło Q_{12}, na izobarze wykonana zostaje nad nim praca W_{23}. Oblicz sprawność cyklu.



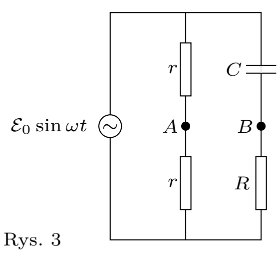
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2020

Przypominamy treść zadań:

690. Jak zależy amplituda napięcia między punktami A i B, w obwodzie przedstawionym na rysunku 3, od oporu R?

691. Elastyczna rurka o długości l łączy w przestrzeni punkty A i B. Różnica wysokości między tymi punktami wynosi h (rys. 4). Wewnątrz rurki wzdłuż całej jej długości leży sznurek, który przytrzymywany jest w punkcie A. Z jakim przyspieszeniem zacznie poruszać się sznurek w pierwszej chwili po jego oswobodzeniu? Tarcie między sznurkiem a ściankami rurki zaniedbujemy.

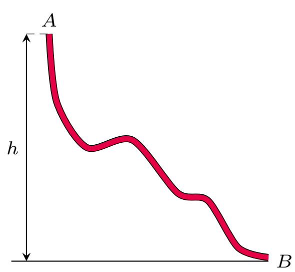


Rys. 3

690. Natężenie prądu płynącego przez kondensator i opornik R jest równe $I=I_0\sin(\omega t+\alpha)$, gdzie $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\omega CR}$.

Z warunku $I=\frac{dQ}{dt}$ otrzymujemy napięcie na kondensatorze $U_C=\frac{Q}{C}= =U_{C_0}\sin(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})$. Jest ono przesunięte w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem napięcia na oporniku $U_R=U_{R_0}\sin(\omega t+\alpha)$.

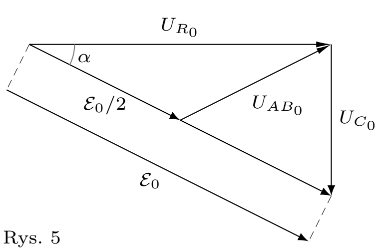
Na diagramie wektorowym (rys. 5) wektory napięć $\mathbf{U}_R$ oraz $\mathbf{U}_C$ są prostopadłe, a ich suma jest wektorem o wartości $\mathcal{E}_0$. Napięcie na każdym z oporników r wynosi $U_r=\frac{\mathcal{E}_0\sin\omega t}{2}$. Wektor napięcia między punktami A i B dany jest wzorem $\mathbf{U}_{AB}=\mathbf{U}_R-\mathbf{U}_r$. Z rysunku 5 widać, że szukana amplituda tego napięcia jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna wynosi $\mathcal{E}_0$. Zatem $U_{AB_0}=\frac{\mathcal{E}_0}{2}$ i nie zależy od wartości oporu R.



Rys. 4

691. Niech Δl oznacza przesunięcie sznurka w bardzo małym przedziale czasowym po rozpoczęciu ruchu, a v osiągniętą w tym czasie prędkość. Ponieważ Δl jest małe, możemy przyjąć, że $v^2=2a\Delta l$, gdzie a jest przyspieszeniem wszystkich punktów sznurka w chwili rozpoczęcia ruchu.

Nie ma tarcia, więc spełniona jest zasada zachowania energii: $Mv^2/2=\Delta E_p$, gdzie M jest masą całego sznurka, a ΔE_p zmianą jego energii potencjalnej w czasie Δt, gdy jego kawałek o długości Δl „przechodzi” z punktu A do B. Zatem $\Delta E_p=\frac{M\Delta l}{l}\,g\,h$. Szukane przyspieszenie dane jest wzorem: $a=gh/l$.



Rys. 5

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT=4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.