litera może pochodzić z podstawienia pod zmienną. Razem tworzą parę albo są częścią maksymalnego bloku. Czyli dla każdego wystąpienia litery a w równaniu istnieje zła para lub litera, której wystąpienie zawiera to ustalone wystąpienie a. Skrócenie tej pary/litery usunie to ustalone wystąpienie a. Jako że jest $2n$ złych par i liter, „średnio" skrócenie usunie przynajmniej $\frac{m}{2n}$ liter oraz wprowadzi co najwyżej połowę z tej liczby (skrócenie pary usuwa dwie litery i dodaje jedną, a skrócenie bloku liter usuwa wiele liter i dodaje jedną). Tak więc istnieje takie skrócenie, które w sumie skróci równanie o przynajmniej $\frac{m}{4n}$ liter. Musimy też wykonać jedno udobruchanie, które wprowadza do równania najwyżej $2n$ liter: udobruchanie litery wprowadza długie powtórzenia tej litery, ale zaraz każde takie powtórzenie zostanie zastąpione przez jedną literę. Tak więc nowe równanie ma najwyżej m (stare litery) $- m/4n$ (usunięte przez skrócenie) $+ 2n$ (udobruchanie) liter. Oszacujmy:

$$m - m/4n + 2n = m(1 - 1/4n) + 2n \leqslant 8n^2(1 - 1/4n) + 2n = 8n^2,$$

jedyna nierówność wynika z ograniczenia $m \leqslant 8n^2$. I to jest koniec: dla podanych wyżej wyborów równanie znajdzie rozwiązanie i równania, które rozważa, mają najwyżej $8n^2$ liter (i najwyżej n zmiennych).

A czego nie wiemy o równaniach napisów? Dokładniejsza analiza algorytmu pokazuje, że jeśli istnieje rozwiązanie, to istnieje też rozwiązanie podwójnie wykładnicze. Nie jest jednak znane równanie, którego najkrótsze rozwiązanie jest ponad wykładnicze; popularna jest hipoteza, że jeśli istnieje rozwiązanie, to istnieje też rozwiązanie wykładnicze. Do równań napisów można też dodać dodatkowe warunki na rozwiązanie, np. żądać, by suma długości podstawień pod X i Y była równa długości podstawienia pod Z. Nie wiadomo, czy równania napisów z liniowymi warunkami na długości podstawień można rozwiązać.

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1633. Pewne n przekątnych $2n$-kąta foremnego przecina się w jednym punkcie, który nie jest wierzchołkiem tego wielokąta. Wykazać, że jest jego środkiem.
Rozwiązanie na str. 2

M 1634. Wierzchołki $2n$-kąta foremnego oznaczono przez $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$, niekoniecznie w tej kolejności. Udowodnić, że łamana zamknięta $P_1P_2\ldots P_{2n}$ zawiera parę odcinków równoległych.
Rozwiązanie na str. 2

M 1635. Prostokąt nazwiemy *parzystym*, jeśli każdy z jego wymiarów jest parzystą liczbą całkowitą. Kwadrat $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, podzielono na części, z których każda jest parzystym prostokątem lub kwadratem 1×1. Znaleźć najmniejszą możliwą liczbę kwadratów 1×1 uzyskanych w takim podziale.
Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 997. Jądro ^{238}U może ulec rozpadowi α lub samorzutnemu rozszczepieniu na dwa mniejsze jądra. W czasie $t = 1$ godzina zaobserwowano $N_f = 25$ reakcji rozszczepienia zachodzących w próbce 1 g czystego ^{238}U. Oszacuj, ile wynosi czas połowicznego zaniku dla ^{238}U ze względu na rozszczepienie? Stała Avogadro $N_{\mathrm{A}} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$. (Dla porównania: czas połowicznego zaniku ze względu na rozpad α wynosi $4{,}47 \cdot 10^9$ lat).
Rozwiązanie na str. 9

F 998. Podczas ruchu ciała w powietrzu siła oporu jest proporcjonalna do iloczynu kwadratu prędkości v ciała i pola S jego przekroju poprzecznego, prostopadłego do kierunku ruchu: $F_{\mathrm{op}} = -kSv^2$. Wartość stałej k zależy od kształtu ciała. Siła oporu powoduje, że spadające swobodnie ciała po pewnym czasie spadania osiągają stałą prędkość spadku – prędkość graniczną. Jaki jest stosunek prędkości granicznych osiąganych przez kulki
a) z tego samego materiału o masach m i $8m$?
b) o tych samych rozmiarach, ale o gęstości ρ i 8ρ?
Rozwiązanie na str. 16