O wieżach potęgowych (II)

*Karol GRYSZKA**

*Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Spróbujmy rozwiązać następujące zadanie: znaleźć takie b, dla którego

$$b^{b^{b^{b^{\cdots}}}} = 4.$$

Zauważmy, że wykładnik $b^{b^{b^{\cdots}}}$ liczby b w równaniu jest równy całemu wyrażeniu (które jest równe 4). Wynika z tego równość $b^4 = 4$, a więc $b = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Gotowe. Czytelników Zaniepokojonych tak prostym rozwiązaniem prosimy o cierpliwość. Teraz drugie zadanie: rozwiązać równanie

$$a^{a^{a^{a^{\cdots}}}} = 2.$$

Postępując podobnie jak wyżej, otrzymujemy $a = \sqrt{2}$. Ale w takim razie $a = b$ oraz

$$2 = a^{a^{a^{a^{\cdots}}}} = b^{b^{b^{b^{\cdots}}}} = 4.$$

Zachęcamy Czytelnika do próby wyjaśnienia tego paradoksu przed lekturą kolejnych akapitów.

W artykule *Porównywanie wież potęgowych* (Δ^2_{19}) rozważane były wieże postaci $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}$, co zapisywane było $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Wprowadźmy następującą notację:

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] := a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}},$$

gdzie a_i dla $i \in \mathbb{N}$ to dowolna dodatnia liczba rzeczywista. Jak należy rozumieć nieskończone wieże potęgowe? Formalnie jest to granica ciągu liczbowego

$$[a_1, a_2, \ldots] := \lim_{n \to +\infty} [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

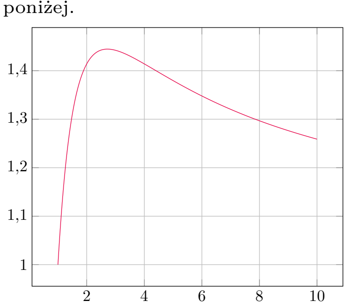
Zatem albo wieża definiuje pewną liczbę, albo jest rozbieżna. Dla uproszczenia notacji, jeżeli $a_i = a$ dla $i \in \mathbb{N}$, to będziemy zapisywać $[a, a, \ldots] = [a \times \infty]$. Przykładem wieży rozbieżnej jest $[2 \times \infty] = +\infty$, natomiast $[1 \times \infty] = 1$. Czy w takim razie w ogóle ma sens rozważać $a > 1$?

Które wieże zatem są zbieżne? W ogólnym przypadku, gdy składniki wieży są dowolne, trudno jest odpowiedzieć na to pytanie. My zajmiemy się prostszą sytuacją, gdy wieża ma postać $[a \times \infty]$. Wtedy łatwo można wyznaczyć jej granicę. Istotnie, jeśli istnieje granica $[a \times \infty]$ i wynosi ona x, to zachodzi

$$x = a^x.$$

To prowadzi do wniosku, że $a = \sqrt[x]{x}$. Ta równość wiąże w sposób istotny granicę wieży oraz jej składniki. W szczególności można ją traktować jak funkcję. Przyjrzyjmy się teraz następującemu twierdzeniu.

Wykres funkcji $f(x) = \sqrt[x]{x}$ dla x w zakresie $[1, 10]$ przedstawiony jest poniżej.



Zachodzi szacowanie:

$$\sqrt[x]{x} \leqslant \sqrt[e]{e}.$$

Twierdzenie 1. *Niech* $f(x) = \sqrt[x]{x}$ *dla* $x \geqslant 1$. *Wtedy:*

1. $f : [1, +\infty) \to [1, \sqrt[e]{e}]$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(1) = 1$;
3. *Jeśli* $a \in (1, \sqrt[e]{e})$, *to równanie* $f(x) = a$ *ma takie dwa rozwiązania* x_1 *i* x_2, *że* $x_1 < e$ *oraz* $x_2 > e$;
4. *Jeśli* $a = e$ *lub* $a = 1$, *to równanie* $f(x) = a$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie;*
5. *Jeśli* $a > e$, *to równanie* $f(x) = a$ *nie ma rozwiązań.*

Z twierdzenia 1 możemy wyciągnąć wniosek, że jeśli $a > \sqrt[e]{e}$, to $[a \times \infty]$ nie istnieje. Dodatkowo, jeżeli $a \in [1, \sqrt[e]{e}]$, to wtedy wieża $[a \times \infty]$ ma szansę być zbieżna. W szczególności, ponieważ $f(e) = \sqrt[e]{e}$, to $[\sqrt[e]{e} \times \infty] = e$. Robert Arthur Knoebel dowodzi, że $[a \times \infty]$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$. My zaś wykażemy zbieżność w przypadku $a \in (1, \sqrt[e]{e})$.

Twierdzenie 1′. *Jeśli* $a \in (1, \sqrt[e]{e})$, *to* $[a \times \infty]$ *jest dobrze określona.*

Dowód. Wykażemy, że ciąg $([a \times n])_{n>0}$ jest ciągiem rosnącym i ograniczonym, z tego będzie wynikała zbieżność[1].

Najpierw wykażemy, że wartość wieży potęgowej $[a \times n]$ jest mniejsza niż e dla każdego n. Zauważmy, że $a < e$. Załóżmy teraz, że $[a \times n] < e$ dla $n > 0$. Wtedy

$$[a \times (n+1)] = [a, a \times n] < [a, e] < [\sqrt[e]{e}, e] = e.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej ciąg jest więc ograniczony. Teraz wykażemy, że jest rosnący. Po pierwsze zauważmy, że gdy a należy do rozważanego przedziału, to zachodzi nierówność $a < a^a$. Załóżmy, że $[a \times (n-1)] > [a \times (n-2)]$ i wywnioskujemy z tego, że $[a \times n] > [a \times (n-1)]$. Zachodzi

$$[a \times n] = [a, a \times (n-1)] > [a, a \times (n-2)] = [a \times (n-1)].$$

[1] Dowód zbieżności można znaleźć na przykład w pracy: R. Arthur Knoebel, *Exponentials Reiterated*, która ukazała się w 1981 roku w The American Mathematical Monthly.

Z zasady indukcji mamy, że ciąg $([a \times n])_{n>0}$ jest rosnący. Z faktu, że ciąg jest rosnący oraz ograniczony, wynika jego zbieżność. $\square$

Powyższe rozważania możemy wykorzystać do sformułowania następujących równości:

$$[\sqrt{2} \times \infty] = [\sqrt[4]{4} \times \infty] = 2.$$

Ciekawostką jest, że jeżeli a jest dodatnią liczbą naturalną, to tylko dla $a = 1, 2, 4$ wartości wieże są liczbami wymiernymi – wszystkie pozostałe przypadki generują nie tylko liczby niewymierne, ale i przestępne[2]! Ta i inne teorioliczbowe własności wież potęgowych zostały skumulowane w poniższym twierdzeniu.

[2] *Liczba przestępna* to liczba, która nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

[3] *Liczba algebraiczna* to liczba, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 2. *Niech $a \in (1, \sqrt[e]{e})$ będzie liczbą algebraiczną*[3]*. Wtedy:*

1. *Jeśli $a \neq \sqrt[b]{b}$ dla wszystkich wymiernych $b > 1$, to $[a \times \infty]$ jest liczbą przestępną;*
2. *Jeśli $a = \sqrt[b]{b}$ dla pewnej liczby wymiernej $b > 1$, to:*
   (a) *jeśli $b \in (1, e)$, to $[a \times \infty] = b$,*
   (b) *(przypadek przejściowy) jeśli $b = e$, to $[\sqrt[e]{e} \times \infty] = e$ jest liczbą przestępną,*
   (c) *jeśli $b > e$, to:*
      (i) *jeśli $b = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}$ dla pewnej liczby całkowitej $s > 1$, to $[a \times \infty] = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s}$,*[4]
      (ii) *jeśli b nie jest postaci $b = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}$ dla pewnej liczby całkowitej $s > 1$, to $[a \times \infty]$ jest liczbą przestępną.*[5]

[4] Dla $s = 1$ otrzymujemy $b = 4$ oraz $a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ i $[\sqrt{2} \times \infty] = 2$.

[5] Dowód Twierdzenia 2 można znaleźć w pracy: M. Vassilev-Missana, *Some Results on Infinite Power Towers* z 2010 roku.

Punkt 2(c)(i) powyższego twierdzenia można wykorzystać do rozwiązania w liczbach wymiernych równania

$$\sqrt[x]{x} = \sqrt[y]{y},$$

przy założeniach $1 < x < e$ oraz $y > e$. Wtedy

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s}, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots$$

W szczególności, dla $s = 1$ otrzymujemy $x = 2$ i $y = 4$ oraz równość $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$. Dla $s = 2$ zaś otrzymujemy $x = \frac{9}{4}$ i $y = \frac{27}{8}$ oraz równość $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{9}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{8}{27}}$. Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić słuszność powyższych równości.

Wróćmy teraz do paradoksalnego rozumowania przedstawionego na początku artykułu. Przypomnijmy: wynika z niego, że $a = \sqrt{2}$ jest rozwiązaniem, ale samo rozumowanie prowadzące do tego wyniku nie jest satysfakcjonujące – dokonujemy pewnego podstawienia bez uprzedniej wiedzy na temat tego, czy $[a \times \infty]$ jest zbieżne. Dla $a = \sqrt{2}$ zdefiniujmy zatem $a_n = [a \times n]$. Łatwo można wykazać zbieżność a_n bez odwoływania się do trudnych twierdzeń. Mamy wszak $a_1 \leqslant 2$ oraz

$$a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} \leqslant \sqrt{2}^{2} = 2,$$

zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $a_n \leqslant 2$. Ponadto oczywiście $a_n > a_{n-1}$, więc ciąg a_n jest zbieżny. Niech d będzie jego granicą, wtedy $d = a^d$ i skoro $a = \sqrt[d]{d} = \sqrt{2}$, to $d = 2$ lub $d = 4$. Jednak rozwiązanie $d = 4$ odrzucamy, gdyż $a_n \leqslant 2$ implikuje $d \leqslant 2$. W takim razie $[\sqrt{2} \times \infty] = 2$, ale zdecydowanie nie $[\sqrt[4]{4} \times \infty] = 4$.

Dla jakich x równanie

$$a^{a^{a^{a^{\cdots}}}} = x$$

ma zatem rozwiązanie? Skoro $[a \times \infty]$ jest zbieżna (wtedy równanie ma sens) i $a \in [e^{-e}, \sqrt[e]{e}]$ oraz funkcja

$$g : [e^{-e}, \sqrt[e]{e}] \ni a \mapsto [a \times \infty]$$

jest rosnąca, to wystarczy obliczyć $g(e^{-e})$ oraz $g(\sqrt[e]{e})$. Ale to zadanie jest proste, gdyż jeśli $x = [a \times \infty]$, to $a = \sqrt[x]{x}$. Zatem

$$\sqrt[x]{x} = \sqrt[e]{e} \Longrightarrow x = e \Longrightarrow g(\sqrt[e]{e}) = e,$$

$$\sqrt[x]{x} = e^{-e} \Longrightarrow x = \frac{1}{e} \Longrightarrow g(e^{-e}) = \frac{1}{e}.$$

Tym samym $x \in \left[e^{-1}, e\right]$. W szczególności rozważane wcześniej równanie $[y \times \infty] = 4$ nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie zadania F 997.
Liczba rozpadów jądra, jak każdy typ rozpadu, opisywana jest równaniem zawierającym wszystkie rodzaje procesów rozpadu. W przypadku ^{238}U:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_f N - \lambda_\alpha N,$$

gdzie N oznacza liczbę jąder atomowych w próbce, a stałe λ_f i $\lambda\alpha$ dotyczą, odpowiednio, rozszczepienia i rozpadu α. Dla każdego z procesów wartość odpowiadającej mu stałej λ jest odwrotnością czasu połowicznego zaniku pomnożoną przez $\ln 2$. Z uwagi na ogromną wartość liczby Avogadro i niewielką liczbę zaobserwowanych rozpadów – co oznacza bardzo duży czas zaniku – możemy przyjąć, że liczba rozpadów $N_f \approx \lambda_f t N$. Otrzymujemy dla rozszczepienia:

$$t_{1/2f} = \frac{tN \ln 2}{N_f}.$$

Podstawiając $N = N_{\mathrm{A}}/238$ oraz 1 godzina to 1 rok/(24 · 365,25), otrzymujemy $t_{1/2f} = 8 \cdot 10^{15}$ lat. W tym samym czasie 1 godziny w próbce zajdzie około $4{,}5 \cdot 10^{7}$ rozpadów α.