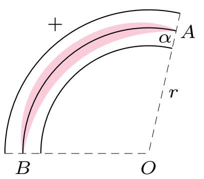
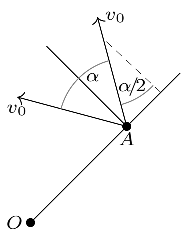
Klub 44 F

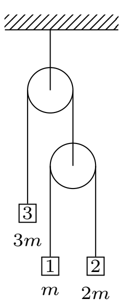
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2020



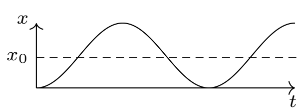
Rys. 1



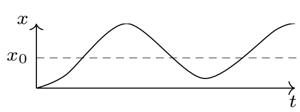
Rys. 2



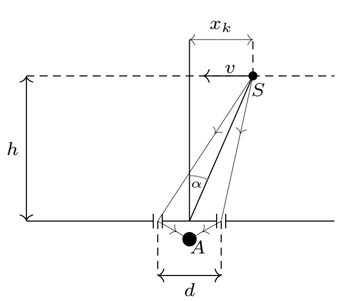
Rys. 3



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Zadania z fizyki nr 696, 697

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

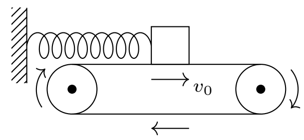
696. Z punktu A kondensatora cylindrycznego wylatuje lekko rozchodząca się wiązka jonów dodatnich. Kąt rozwarcia wiązki wynosi α (rys. 1, 2). Wszystkie jony w wiązce mają taką samą energię. Jony, których prędkość w punkcie A jest prostopadła do odcinka OA, poruszają się po okręgu o promieniu $r_0 = |OA|$, współśrodkowym z okładkami kondensatora. Pokazać, że wiązka jonów ponownie zogniskuje się w pewnym punkcie B, i znaleźć kąt AOB. Wyznaczyć maksymalną szerokość wiązki.

697. W układzie przedstawionym na rysunku 3 oba bloczki nie obracają się, a nitki mogą ślizgać się po nich bez tarcia. Bloczek ruchomy jest nieważki, masy ciężarków są dane. Znaleźć przyspieszenie ciężarka o masie $3m$.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2019

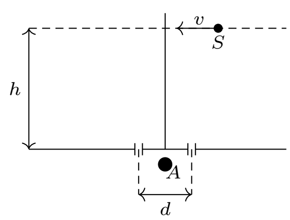
Przypominamy treść zadań:

688. Na nieruchomej taśmie transportera leży klocek o masie M, przyczepiony do ściany za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k (rys. 4). Taśmę wprawiono w ruch ze stałą prędkością v_0 i po pewnym czasie ustaliły się drgania harmoniczne klocka. Znaleźć czas, po którym to nastąpiło, oraz amplitudę ustalonych drgań. Współczynnik tarcia klocka o taśmę jest równy μ.



Rys. 4

689. Punktowe źródło światła S porusza się ruchem jednostajnym równolegle do ekranu, w którym znajdują się dwa małe otworki w odległości $d = 2$ mm od siebie. Odległość źródła od ekranu wynosi $h = 1$ m (rys. 5). Oświetlenie w punkcie A na osi układu zmienia się z częstotliwością $f = 15$ Hz, długość fali świetlnej emitowanej przez źródło $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m. Znaleźć prędkość źródła v. Podczas pomiarów oświetlenia źródło znajduje się w małej odległości od osi układu.



Rys. 5

688. Po uruchomieniu taśmy na klocek działa siła tarcia $T = \mu Mg$ oraz siła sprężystości $F = -kx$, gdzie x jest wydłużeniem sprężyny. Siły te równoważą się, gdy wydłużenie sprężyny osiąga wartość $x_0 = \mu Mg/k$. Musimy rozważyć dwa przypadki: 1) Klocek dojdzie do położenia równowagi z prędkością $v_m \leqslant v_0$; 2) Klocek osiągnie prędkość taśmy, zanim dojdzie do położenia równowagi.

1) W pierwszym przypadku ruch klocka jest analogiczny do ruchu ciężarka zawieszonego na sprężynie w polu ciężkości. Rolę siły ciężkości odgrywa stała siła tarcia. Klocek od razu zaczyna drgać harmonicznie z amplitudą równą odległości początkowej x_0 od położenia równowagi. Zależność wydłużenia sprężyny od czasu opisuje równanie $x = \frac{\mu Mg}{k}\left(1 + \sin\left(\omega t + \varphi\right)\right)$, gdzie częstość drgań $\omega = \sqrt{k/M}$. Przesunięcie fazowe φ wyznaczamy z warunku początkowego $x(0) = 0$ i otrzymujemy $\varphi = -\pi/2$. Zależność $x = x_0(1 - \cos\omega t)$ ilustruje rysunek 6. Prędkość klocka opisuje równanie $v = x_0\omega\sin\omega t$. Prędkość maksymalna w położeniu równowagi wynosi $v_m = \mu g\sqrt{(M/k)}$.
2) Drugi przypadek zachodzi, gdy $v_m > v_o$. Klocek osiąga prędkość taśmy po czasie $t_1 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(v_0/x_0\omega\right)$. Tarcie staje się wtedy tarciem statycznym i równoważy siłę sprężystości. Klocek porusza się ruchem jednostajnym do chwili, gdy znajdzie się w położeniu równowagi, a tarcie ponownie osiągnie wartość μMg. Od tego momentu tarcie pozostaje stałe, a klocek porusza się ruchem harmonicznym z taką samą częstością ω, ale z inną amplitudą. Amplituda prędkości wynosi teraz v_0 (z taką prędkością klocek przechodzi przez położenie równowagi), zatem amplituda drgań dana jest wzorem $A = v_0/\omega = v_0\sqrt{M/k}$. Ustalone drgania rozpoczną się po czasie $t = t_1 + \left(x_0 - x\left(t_1\right)\right)/v_0$. Ilustruje to rysunek 7.

689. Ponieważ $h \gg d$, różnica dróg promieni docierających ze źródła do punktu A po ugięciu na dwóch szczelinach wynosi $d\sin\alpha$ (rys. 8). Maksimum oświetlenia rejestrujemy, gdy $d\sin\alpha = k\lambda$, gdzie $k > 0$ jest liczbą całkowitą. Odległość źródła x_k od osi układu jest mała, możemy więc stosować przybliżenie małych kątów: $\sin\alpha \approx x_k/h$, stąd $x_k = k\lambda h/d$. Droga przebyta przez źródło w czasie równym okresowi zmian oświetlenia punktu A wynosi $x_{k+1} - x_k = \lambda h/d = v/f$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $v = 4,5 \cdot 10^{-3}$ m/s.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 785 ($WT = 1{,}70$) i 786 ($WT = 1{,}22$) z numeru 9/2019

Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Fiett	Warszawa	35,51
Mikołaj Pater	Opole	34,42
Paweł Burdzy	Warszawa	33,52
Zbigniew Skalik	Wrocław	32,95
Jakub Węgrecki	Kraków	32,16

Zadania z matematyki nr 799, 800

Redaguje Marcin E. KUCZMA

799. Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

800. Dla ustalonych liczb dodatnich a, b określamy funkcję $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{a}{x}+1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x}+1\right)\right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $L = L(a,b) > 0$, dla której $f(L) = 1$, i że $\min\{a,b\} \leqslant L(a,b) \leqslant \max\{a,b\}$; zatem liczba $L(a,b)$ może być uważana za pewną średnią liczb a, b.
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności $H(a,b) \leqslant G(a,b) \leqslant A(a,b)$ między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb a, b?

Zadanie 800 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2019

Przypominamy treść zadań:

791. Funkcja $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+a) - \ln(x+b)} \qquad (\text{stałe: } a > b > 0).$$

Wykazać, że ma ona asymptotę ukośną (przy $x \to \infty$), i znaleźć równanie tej asymptoty.

792. Dane są liczby naturalne m, n, przy czym n jest liczbą nieparzystą, większą niż $2m$. Udowodnić, że liczba

$$m^n + (m+1)^n + \ldots + (n-m)^n$$

jest podzielna przez n^2.

791. Ponieważ

$$\frac{1}{f(x)} = \ln\frac{x+a}{x+b} = \ln(1+t), \qquad \text{gdzie } t = \frac{a-b}{x+b},$$

zaś zmienna pomocnicza $t = \frac{a-b}{x+b}$ dąży do 0, gdy $x \to \infty$, zatem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{a-b-bt}\cdot\frac{1}{\ln(1+t)} = \frac{1}{a-b}.$$

Asymptotą ukośną może więc być jedynie prosta o współczynniku kierunkowym $\frac{1}{a-b}$; wystarczy zatem, by następująca różnica miała skończoną granicę (przy $x \to \infty$, czyli $t \to 0$):

$$f(x) - \frac{x}{a-b} = \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{a-b}\left(\frac{a-b}{t} - b\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} + \frac{b}{a-b} =$$

$$= \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)} + \frac{b}{a-b}.$$

Gdy $t \to 0$, pierwszy z ilorazów (w ostatnim uzyskanym wyrażeniu) dąży do granicy $1/2$ (bo $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$). Stąd wniosek, że asymptotą (przy $x \to \infty$) jest prosta o równaniu

$$y = \frac{x}{a-b} + \frac{1}{2} + \frac{b}{a-b} = \frac{2x+a+b}{2(a-b)}.$$

792. Rozważana suma ma parzystą liczbę składników. Parujemy: pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd. Dostajemy sumę par postaci

$$A_j = \left(\frac{n+j}{2}\right)^n + \left(\frac{n-j}{2}\right)^n, \qquad j = 1, 3, 5, \ldots, n-2m.$$

Wystarczy pokazać, że każda z liczb A_j dzieli się przez n^2. W rozwinięciu dwumianowym

$$2^n A_j = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n^k \left(j^{n-k} + (-j)^{n-k}\right)$$

składniki odpowiadające indeksom $k \geqslant 2$ są podzielne przez n^2; skoro zaś n jest liczbą nieparzystą, dwa składniki początkowe dają w sumie

$$\left(j^n + (-j)^n\right) + n\cdot n\cdot\left(j^{n-1} + (-j)^{n-1}\right) = n^2\cdot 2j^{n-1}.$$

Tak więc $2^n A_j$ dzieli się przez n^2. Korzystając jeszcze raz z nieparzystości n, wnosimy, że A_j dzieli się przez n^2.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.