

$|p^{-1}(\emptyset)|$ razy. Oznacza to, że zbiór 2^A można podzielić na $|p(2^A)|$ podzbiorów, każdy o liczności $|p^{-1}(\emptyset)|$, co daje nam równość

$$(1) \quad |2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

Ustalmy ścianę f i oznaczmy jej krawędzie oraz wierzchołki jak na rysunku, wówczas $\partial_2(\{f\}) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Widzimy teraz, że każdy z wierzchołków v_1, v_2, v_3 należy do dwóch krawędzi z otrzymanego zbioru, natomiast każdy pozostały wierzchołek nie należy do żadnego. Jako że 0 i 2 są liczbami parzystymi, wnioskujemy, że $\partial_1(\partial_2(\{f\}))$ jest zbiorem pustym. Korzystając z liniowości operatorów ∂_1 i ∂_2 (i indukcji względem k), możemy wyprowadzić równość $\partial_1(\partial_2(\{f_1, \dots, f_k\})) = \emptyset$ dla dowolnego podzbioru $\{f_1, \dots, f_k\}$ rodziny \mathcal{F} . Oznacza to, że jeśli \mathcal{E}' jest wartością ∂_2 (czyli jest elementem $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$), to $\partial_1(\mathcal{E}') = \emptyset$ (czyli \mathcal{E}' jest elementem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$). Zbiór $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$ jest więc podzbiorem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$, w związku z czym

$$(2) \quad |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)|.$$

Wprost z definicji ∂_2 wynika, że $\partial_2(\emptyset) = \emptyset$ oraz $\partial_2(\mathcal{F}) = \emptyset$; sprawdzimy teraz, że istotnie $\partial_2^{-1}(\emptyset) = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$. Rozważmy mianowicie podzbiór $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dla którego $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$. Warunek ten oznacza, że jeśli jakaś ściana należy do \mathcal{F}' , to każda ze ścian sąsiadujących również należy do \mathcal{F}' . Ponieważ \mathcal{M} jest powierzchnią spójną, łatwo zauważyć, że wówczas wszystkie ściany muszą należeć do \mathcal{F}' . Pozostawia to dwa możliwe przypadki: $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ oraz $\mathcal{F}' = \emptyset$.

Wykażemy również, że $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) = \mathcal{P}$, gdzie \mathcal{P} jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów \mathcal{V} . Zauważmy najpierw, że $\partial_1(\{e\})$ jest zbiorem dwuelementowym, a więc $\partial_1(\{e\}) \in \mathcal{P}$. Ponieważ różnica symetryczna dwóch zbiorów parzystej mocy również jest parzystej mocy, ogólny warunek $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) \in \mathcal{P}$ łatwo otrzymujemy z liniowości ∂_1 przez indukcję ze względu na k . Stąd zawieranie $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{P}$. Dla dowodu przeciwnego zawierania rozważmy najpierw dowolny dwuelementowy zbiór wierzchołków $\{v_1, v_2\}$. Dzięki spójności \mathcal{M} możemy znaleźć łamaną e_1, \dots, e_k prowadzącą z v_1 do v_k ; wprost z definicji mamy wtedy $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) = \{v_1, v_2\}$. Ogólny przypadek ponownie otrzymujemy przez indukcję. Jeśli dla dowolnych v_1, \dots, v_4 umiemy znaleźć podzbiory X, Y spełniające $\partial_1(X) = \{v_1, v_2\}$ i $\partial_1(Y) = \{v_3, v_4\}$, to

$$\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y) = \{v_1, \dots, v_4\}.$$

Iterując to rozumowanie, otrzymujemy odpowiedni zbiór krawędzi dla każdego parzystoelementowego zbioru wierzchołków.

Z powyższych dwóch akapitów wynika, że

$$(3) \quad |\partial_2^{-1}(\emptyset)| = 2 \quad \text{oraz} \quad |\partial_1(2^{\mathcal{E}})| = |\mathcal{P}| = 2^{V-1}.$$

Wykorzystując równości (1), (2) i (3), otrzymujemy

$$\frac{2^{\mathcal{F}}}{2} = \frac{|2^{\mathcal{F}}|}{|\partial_2^{-1}(\emptyset)|} = |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)| = \frac{|2^{\mathcal{E}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|} = \frac{2^{\mathcal{E}}}{2^{V-1}}.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron odczytujemy nierówność $V - E + F \leq 2$, która kończy dowód lematu, przez to również uzasadnienie twierdzenia, w konsekwencji niestety niniejszy artykuł. A wszystko zaczęło się tak niewinnie, od sumy kątów w trójkącie...

Dlaczego $|\mathcal{P}| = 2^{V-1}$? Jeśli ustalimy dowolny wierzchołek $v \in \mathcal{V}$, to

$$X \mapsto X \div v$$

zadaje bijekcję między rodziną \mathcal{P} a dopełnieniem tej rodziny.

Od obserwacji Eddingtona do obrazu czarnej dziury

* Black Hole Initiative,
Harvard University

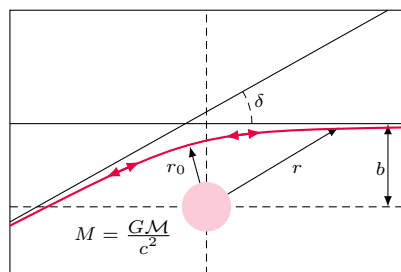
Maciek WIELGUS

W kwietniu 2019 roku mieliśmy okazję zobaczyć pierwszy obraz supermasywnej czarnej dziury w centrum galaktyki M87, zarejestrowany przez Teleskop Horyzontu Zdarzeń (*Event Horizon Telescope*, EHT). Obraz przedstawia niezbyt ostry jasny pierścień, czasem określany jako *cień czarnej dziury*. Szybko zrobił popkulturową karierę, zostając bohaterem licznych memów, ale czy aby wszyscy publikujący jego internetowe przeróbki wiedzą, co tak naprawdę przedstawia? Żeby to wyjaśnić, musimy najpierw cofnąć się w czasie o 100 lat, do początków teorii względności i teorii grawitacyjnego ugięcia promieni światła.

W roku 1915 Albert Einstein sformułował nową teorię grawitacji, ogólną teorię względności (OTW). Zamiast widzieć grawitację jako siłę oddziałującą między masywnymi ciałami zanurzonymi w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, OTW opisuje ją jako krzywiznę czterowymiarowej rozmierności – *czasoprzestrzeni*. Geometria czasoprzestrzeni determinuje tor ruchu fotonów, prowadząc do efektu ugięcia promieni światła w pobliżu masywnych obiektów. W świetle klasycznej newtonowskiej teorii grawitacji fotony, jako cząstki bezmasowe, nie oddziałują grawitacyjnie, a zatem ich trajektorie nie powinny ulegać zakrzywieniu. Jeśli jednak zapomnimy o tym na chwilę i założymy, że fotony poruszają się w polu grawitacyjnym tak jak dowolnie lekkie materialne cząstki, obliczymy kąt ugięcia światła δ . Zignorujemy również fakt, że taki ruch implikowałby, że fotony przyspieszają w polu grawitacyjnym, a więc prędkość światła musiałaby nie być stała. Same problemy!

Problem ruchu dwóch ciał w teorii Newtona zawsze daje rozwiązania będące krzywymi stożkowymi: okręgami, elipsami, parabolami lub hiperbolami.

Żeby wyprowadzić wzór (*), trzeba założyć, że foton osiąga maksymalną prędkość równą c w punkcie najmniejszej odległości r_0 . Alternatywna wersja, z prędkością c osiąganą w nieskończoności, daje taki sam kąt δ_N w pierwszym rzędzie rozwinięcia względem M/r_0 .



Grawitacyjne ugięcie promienia światła o kąt δ pod wpływem obiektu o masie M . Strzałki na trajektorii zaznaczają, że foton może ją przebyć w obydwie strony

Dla małego kąta ugięcia δ masywne fotony poruszałyby się po hiperbolach w newtonowskim polu grawitacyjnym. Przykład takiej trajektorii jest pokazany na rysunku na marginesie. Newtonowski kąt δ_N i odległość r_0 , najmniejsza odległość między fotonem i centrum masy, są związane prostą formułą

$$(*) \quad \delta_N = 2 \arccos \left(\frac{-M}{r_0 - M} \right) - \pi = 2 \frac{M}{r_0} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{r_0} \right)^2 \right).$$

Wprowadziliśmy tu mierzoną w jednostkach odległości masę M , nazywaną też *promieniem masowym*. Jest ona związana ze standardową masą \mathcal{M} przez odpowiednie skalowanie, $M = G\mathcal{M}/c^2$, gdzie G to stała grawitacji, natomiast c to prędkość światła w próżni.

OTW rozwiązuje problem grawitacyjnego ugięcia trajektorii bezmasowego fotonu – to krzywizna czasoprzestrzeni spowodowana obecnością masywnego obiektu wymusza zmianę jego toru ruchu. W teorii względności fotony nie tylko pozostają bezmasowe, ale również zawsze poruszają się ze stałą prędkością c . Einsteinowska formuła na obserwowany kąt δ_E jest trochę bardziej zawiła i zadana przez całkę oznaczoną:

$$\delta_E = 2 \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2) \left(1 - 2 \frac{1-q^2}{1-q^2} \frac{M}{r_0} \right)}} - \pi = 4 \frac{M}{r_0} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{r_0} \right)^2 \right),$$

gdzie $q = r_0/r$, w tym przypadku r_0 jest nie mniejsze od fizycznego promienia Słońca. Porównując te dwa równania, widzimy, że newtonowska formuła przewiduje dla małych wartości M/r_0 dwukrotnie mniejsze ugięcie δ od formuły wynikającej z OTW – świetny test dla teorii względności! Dla Słońca M/r_0 jest nie większe niż około 2×10^{-6} , a zatem spokojnie możemy zaniedbać wyrazy wyższego rzędu. W 1919 roku ugięcie promieni światła odległych gwiazd przez grawitację Słońca zostało zaobserwowane i zmierzone po raz pierwszy podczas wyprawy badawczej pod kierownictwem sławnego brytyjskiego astronoma, Arthura Eddingtona. Wykorzystując całkowite zaćmienie Słońca, aby móc zarejestrować dokładne położenie gwiazd znajdujących się w pobliżu tarczy słonecznej, otrzymał on wynik $\delta = 1,98'' \pm 0,18''$ (sekundy łuku kątownego), który dość dobrze zgadzał się z wartością przewidzianą przez OTW, $\delta_E = 1,75''$. To bardzo niewielkie ugięcie promieni światła (rzędu tysięcznej części średnicy kątownej Księżyca w pełni) było pierwszym zweryfikowanym obserwacyjnie przewidywaniem OTW i wielkim triumfem Einsteina, który przyniósł mu światową sławę.

Promień horyzontu zdarzeń nierotującej czarnej dziury, tak zwany promień Schwarzschilda, jest równy $2M$.

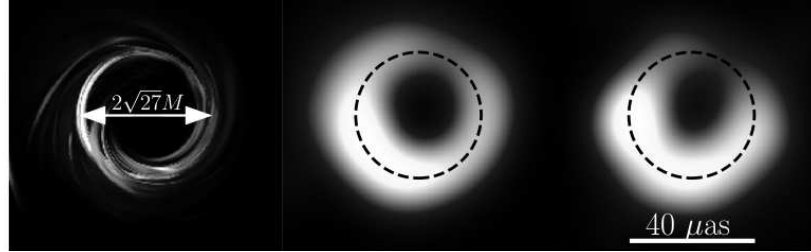
Innym nieoczywistym wnioskiem z teorii grawitacji Einsteina jest istnienie rozwiązań równań OTW, dla których krzywizna czasoprzestrzeni rośnie nieograniczenie, tworząc *osobliwość*. Jest ona otoczona *horyzontem zdarzeń* – sferą, którą można przekroczyć tylko w jednym kierunku. Rozwiązania te nazywamy *czarnymi dziurami*. Nic, nawet światło, przekraczając horyzont czarnej dziury, nie może już nigdy powrócić do zewnętrznego świata. Maksymalny kąt ugięcia promienia światła zależy od zwartości obiektu – obiekty o większej masie względem średnicy pozwalają na większą wartość M/r_0 , a zatem na większe ugięcie δ . Czarne dziury są również pod tym względem bardzo szczególne, zapewniają bowiem maksymalną zwartość, a kąt ugięcia światła przez czarną dziurę może być... nieskończony! Dla wartości $r_0 = 3M$, odpowiadającej *parametrowi zderzenia* $b = \sqrt{27}M$ (patrz schemat na marginesie), wartość δ_E rośnie nieograniczenie,

Sama orbita fotonowa jest niestabilna, więc fotony nie mogą na niej pozostawać zbyt długo.

Promieniowanie synchrotronowe jest generowane przez ładunki elektryczne (w tym przypadku elektrony w zjonizowanym gazie – plazmie) przyspieszające w polu magnetycznym.

co odpowiada wielokrotnemu okrążeniu czarnej dziury przez foton. Jest to tak zwana *orbita fotonowa*. Dla mniejszych b fotony wpadają pod horyzont zdarzeń, dla większych uciekają. Potężny teleskop może uchwycić te, którym udało się uciec, gdzieś daleko od czarnej dziury (54 mln lat świetlnych w przypadku M87).

Z nowo zdobytą wiedzą możemy wrócić do obrazu M87. Poniższy rysunek przedstawia symulację obrazu czarnej dziury. Stworzenie tego rodzaju obrazu wymaga modelowania gorącej (miliardy kelwinów), turbulentnej plazmy opadającej na czarną dziurę i emitującej *promieniowanie synchrotronowe*.



Z lewej: przykładowa klatka symulacji M87, zaznaczona średnica odpowiadająca $D = 2b = 2\sqrt{27}M$ (autorzy: Wong, Prather i Gammie). W środku: ta sama klatka rozmyta do rozdzielczości EHT, zaznaczony okrąg o promieniu $b = \sqrt{27}M$. Z prawej: jeden z obrazów M87 uzyskany przez EHT z zaznaczonym wymiarem kątowym

Ścisiej, $\sqrt{27}M$ to wartość dla nierotującej czarnej dziury. Wraz z rotacją i kątem obserwacji kontur staje się nieco mniejszy i potencjalnie asymetryczny. Te efekty są jednak niewielkie wobec ograniczonej rozdzielczości EHT i niedokładności wyznaczonej odległości do M87.

Symulacje przewidują, że 10–15% całkowitej jasności pierścienia wokół czarnej dziury pochodzi z jego ostrego wewnętrznego brzegu.

Pomiar promienia pierścienia czarnej dziury w symulacjach zazwyczaj daje wynik systematycznie większy o kilka procent od $\sqrt{27}M$, co jest związane z wpływem turbulentnej składowej obrazu.

Następnie trajektorie emitowanych fotonów trafiających do odległego obserwatora muszą być obliczone zgodnie z OTW, uwzględniając absorpcję i rozproszenie przez plazmę, i dopiero wtedy możemy z nich poskładać obraz taki jak na pierwszym panelu rysunku. Widzimy na nim pierścień o ciemnym wnętrzu – to sygnatura horyzontu zdarzeń, z którego wnętrza żaden foton nie może być wyemitowany. Ostry kontur pierścienia to fotony, które zbliżyły się do orbity fotonowej, a ich trajektorie zostały ugięte do wspomnianej krytycznej wartości parametru zderzenia $b = \sqrt{27}M$, dając związek pomiędzy rozmiarem kątowym obrazu i masą czarnej dziury (po uwzględnieniu odległości między obserwatorem a źródłem, pozwalającej na konwersję między wymiarem liniowym i kątowym). Ale widzimy również dość chaotyczną spiralną strukturę dookoła ostrego konturu – to fotony emitowane przez dynamiczną, turbulentną plazmę wirującą wokół czarnej dziury. Fotony takie są emitowane blisko horyzontu zdarzeń, ale nie muszą być powiązane z orbitą fotonową. Niestety Teleskop Horyzontu Zdarzeń, chociaż chwali się największą rozdzielczością w historii naziemnych obserwacji astronomicznych, nie pozwala aktualnie na rozróżnienie tej subtelnej, złożonej struktury. Jeśli rozmyjemy symulowany obraz do efektywnej rozdzielczości EHT (ok. $20 \mu\text{s}$ – mikrosekund łuku kąowego, wystarczająco, by pozostając w Warszawie, poczytać *New York Timesa* leżącego na półce w nowojorskim sklepie z gazetami), otrzymamy obraz na środkowym panelu. Nareszcie przypomina to rezultat EHT! Wykorzystując duży zbiór tego rodzaju symulacji, pomiar masy czarnej dziury w M87 został odpowiednio skalibrowany, dając ostateczny wynik – ponad 6 miliardów mas Słońca.

Pozostaje wyjaśnić, skąd bierze się asymetria pierścienia. Otóż jest to dobrze znana konsekwencja relatywistycznego efektu Dopplera. Rozgrzany gaz wiruje wokół czarnej dziury z ogromną prędkością, porównywalną z prędkością światła. Promieniowanie emitowane przez plazmę poruszającą się chwilowo w kierunku obserwatora jest wzmocnione, nieco podobnie jak dźwięk sygnału zbliżającego się do nas pociągu uzyskuje wyższą częstotliwość, a więc i wyższą energię.

Równo 100 lat po obserwacji Eddingtona, mierzącego pojedyncze sekundy łuku odchylenia promieni światła, EHT pokazał obrazy, na których ugięcie jest setki tysięcy razy większe i powodowane przez obiekt miliardy razy bardziej masywny od Słońca. Wygląda jednak na to, że obydwa przypadki są bardzo dobrze opisane przez jedną i tę samą teorię, ogólną teorię względności, wciąż niezawodną po stuleciu obserwacyjnych i eksperymentalnych testów. Przyszłe usprawnienia EHT, w szczególności obserwacje w zakresie fal radiowych wyższej częstotliwości, mogą pozwolić na oddzielenie turbulentnej składowej emisji od prostego, geometrycznego komponentu przewidzianego przez OTW, umożliwiając jeszcze dokładniejsze badania własności czarnych dziur, czasoprzestrzeni i poprawności teorii względności.

