

O trójkątach (nie tylko) na sferze

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Michał MIŚKIEWICZ*

Rozpocznijmy od przypomnienia, czym jest trójkąt geodezyjny. Mając dane dwa punkty na powierzchni (powiedzmy, że leżące odpowiednio blisko siebie), najkrótszą łączącą je krzywą leżącą na tej powierzchni nazwiemy *geodezyjną*. Dla przykładu – na płaszczyźnie tę rolę pełnią odcinki, a na sferze łuki tzw. okręgów wielkich. Przez *trójkąt geodezyjny* rozumiemy obszar wyznaczony przez trzy punkty, zamknięty między łączącymi je geodezyjnymi. Kąt w wierzchołku takiego trójkąta liczymy jako kąt między stycznymi do odpowiednich krzywych geodezyjnych.

W poprzednim numerze (Δ_{19}^2), w artykule *O trójkątach na sferze*, wprowadziliśmy pojęcie *krzywizny Gaussa*,

opierając się na przykładzie sfer o różnych promieniach. Przypomnijmy je w trochę zmienionej wersji: jeśli na danej powierzchni \mathcal{M} dowolny trójkąt geodezyjny o kątach α, β, γ i polu A spełnia nierówność

$$(*) \quad \alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A,$$

to powiemy, że powierzchnia ta ma krzywiznę Gaussa ograniczoną z dołu przez K . Jeśli $(*)$ jest zawsze równością, to mówimy, że krzywizna Gaussa *jest równa* K . W świetle tej definicji płaszczyzna ma zerową krzywiznę Gaussa, natomiast okazuje się, że sfera o promieniu r ma krzywiznę równą $1/r^2$, co wykazaliśmy w poprzednim artykule.

Celem tego artykułu jest uzasadnienie następującej zależności pola *całej powierzchni* \mathcal{M} od jej krzywizny:

Twierdzenie. Jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią o krzywiznie Gaussa ograniczonej z dołu przez $K > 0$, to jej pole $|\mathcal{M}|$ spełnia nierówność

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{4\pi}{K}.$$

Warto odnotować, że dla dowolnej sfery ta nierówność staje się równością.

Na potrzeby dowodu zacznijmy od nałożenia na \mathcal{M} siatki złożonej z trójkątów geodezyjnych, oznaczmy przez $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ odpowiednio zbiory wierzchołków, krawędzi i trójkątów w tej siatce, a przez V, E, F liczności tych zbiorów. Zadanie pozostawione na koniec poprzedniego artykułu pokazuje, że

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{2\pi}{K}(V - E + F).$$

Pozostaje więc wykazać nierówność $V - E + F \leq 2$. Sprowadziliśmy więc dowód twierdzenia do następującego faktu:

Lemat. Jeśli spójna powierzchnia \mathcal{M} jest pokryta trójkątną siatką, to $V - E + F$ nie przekracza 2.

Aby ten fakt uzasadnić, wprowadzimy narzędzie pomocnicze, w którym odpowiednio doświadczony życiem Czytelnik może rozpoznać homologie symplecjalne o współczynnikach w \mathbb{Z}_2 .

Wprowadźmy zbiory potęgowe (czyli zbiory wszystkich podzbiorów) $2^{\mathcal{V}}, 2^{\mathcal{E}}, 2^{\mathcal{F}}$ i określmy tak zwany *operator brzegu* $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$:

$$\partial_1(X) = \{v \in \mathcal{V} : v \text{ jest końcem nieparzystej wielu krawędzi należących do } X\}.$$

Analogicznie definiujemy drugi operator brzegu $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$:

$$\partial_2(Y) = \{e \in \mathcal{E} : e \text{ jest krawędzią nieparzystej wielu ścian należących do } Y\}.$$

Nazwa *operator brzegu* bierze się stąd, że $\partial_1(\{e\})$ to dwuelementowy zbiór końców krawędzi e , a $\partial_2(\{f\})$ jest zbiorem trzech boków ściany f .

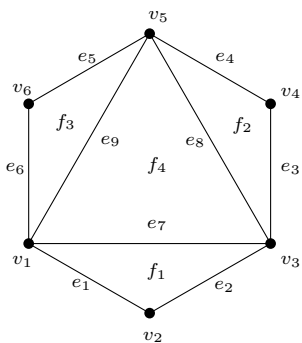
Dla dowodu kluczowa jest pewna własność tych operatorów, którą nazwiemy tutaj *liniowością*. Mianowicie operator $p: 2^A \rightarrow 2^B$ nazwiemy *liniowym*, jeśli

$$p(A_1 \div A_2) = p(A_1) \div p(A_2) \quad \text{dla } A_1, A_2 \subseteq A,$$

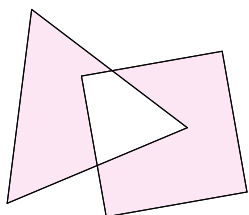
gdzie \div oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów. Sprawdzenie liniowości operatorów ∂_1 i ∂_2 zostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie (rozwiązanie na stronie 14).

Równość $p(A_1) = p(A_2)$ jest równoważna równości $p(A_1) \div p(A_2) = \emptyset$, co (jeśli p jest liniowy) zachodzi dokładnie wtedy, gdy $p(A_1 \div A_2) = \emptyset$. Stąd wynika, że p przyjmuje każdą swoją wartość tyle samo razy, a mianowicie

Gdyby znać *wszystkie* spójne powierzchnie i dla każdej obliczyć charakterystykę Eulera, otrzymalibyśmy dokładnie liczby $2, 1, 0, -1, -2, \dots$. Taka wiedza nie będzie nam jednak konieczna.



Na powyższym rysunku:
 $\partial_1(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}) = \{v_1, v_6\}$,
 $\partial_2(\{f_1, f_2, f_4\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_9\}$



Różnica symetryczna trójkąta i kwadratu zaznaczona jest kolorem.

$|p^{-1}(\emptyset)|$ razy. Oznacza to, że zbiór 2^A można podzielić na $|p(2^A)|$ podzbiorów, każdy o liczności $|p^{-1}(\emptyset)|$, co daje nam równość

$$(1) \quad |2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

Ustalmy ścianę f i oznaczmy jej krawędzie oraz wierzchołki jak na rysunku, wówczas $\partial_2(\{f\}) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Widzimy teraz, że każdy z wierzchołków v_1, v_2, v_3 należy do dwóch krawędzi z otrzymanego zbioru, natomiast każdy pozostały wierzchołek nie należy do żadnego. Jako że 0 i 2 są liczbami parzystymi, wnioskujemy, że $\partial_1(\partial_2(\{f\}))$ jest zbiorem pustym. Korzystając z liniowości operatorów ∂_1 i ∂_2 (i indukcji względem k), możemy wyprowadzić równość $\partial_1(\partial_2(\{f_1, \dots, f_k\})) = \emptyset$ dla dowolnego podzbioru $\{f_1, \dots, f_k\}$ rodziny \mathcal{F} . Oznacza to, że jeśli \mathcal{E}' jest wartością ∂_2 (czyli jest elementem $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$), to $\partial_1(\mathcal{E}') = \emptyset$ (czyli \mathcal{E}' jest elementem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$). Zbiór $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$ jest więc podzbiorem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$, w związku z czym

$$(2) \quad |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)|.$$

Wprost z definicji ∂_2 wynika, że $\partial_2(\emptyset) = \emptyset$ oraz $\partial_2(\mathcal{F}) = \emptyset$; sprawdzimy teraz, że istotnie $\partial_2^{-1}(\emptyset) = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$. Rozważmy mianowicie podzbiór $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dla którego $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$. Warunek ten oznacza, że jeśli jakaś ściana należy do \mathcal{F}' , to każda ze ścian sąsiadujących również należy do \mathcal{F}' . Ponieważ \mathcal{M} jest powierzchnią spójną, łatwo zauważyć, że wówczas wszystkie ściany muszą należeć do \mathcal{F}' . Pozostawia to dwa możliwe przypadki: $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ oraz $\mathcal{F}' = \emptyset$.

Wykażemy również, że $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) = \mathcal{P}$, gdzie \mathcal{P} jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów \mathcal{V} . Zauważmy najpierw, że $\partial_1(\{e\})$ jest zbiorem dwuelementowym, a więc $\partial_1(\{e\}) \in \mathcal{P}$. Ponieważ różnica symetryczna dwóch zbiorów parzystej mocy również jest parzystej mocy, ogólny warunek $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) \in \mathcal{P}$ łatwo otrzymujemy z liniowości ∂_1 przez indukcję ze względu na k . Stąd zawieranie $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{P}$. Dla dowodu przeciwnego zawierania rozważmy najpierw dowolny dwuelementowy zbiór wierzchołków $\{v_1, v_2\}$. Dzięki spójności \mathcal{M} możemy znaleźć łamaną e_1, \dots, e_k prowadzącą z v_1 do v_k ; wprost z definicji mamy wtedy $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) = \{v_1, v_2\}$. Ogólny przypadek ponownie otrzymujemy przez indukcję. Jeśli dla dowolnych v_1, \dots, v_4 umiemy znaleźć podzbiory X, Y spełniające $\partial_1(X) = \{v_1, v_2\}$ i $\partial_1(Y) = \{v_3, v_4\}$, to

$$\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y) = \{v_1, \dots, v_4\}.$$

Iterując to rozumowanie, otrzymujemy odpowiedni zbiór krawędzi dla każdego parzystoelementowego zbioru wierzchołków.

Z powyższych dwóch akapitów wynika, że

$$(3) \quad |\partial_2^{-1}(\emptyset)| = 2 \quad \text{oraz} \quad |\partial_1(2^{\mathcal{E}})| = |\mathcal{P}| = 2^{V-1}.$$

Wykorzystując równości (1), (2) i (3), otrzymujemy

$$\frac{2^{\mathcal{F}}}{2} = \frac{|2^{\mathcal{F}}|}{|\partial_2^{-1}(\emptyset)|} = |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)| = \frac{|2^{\mathcal{E}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|} = \frac{2^{\mathcal{E}}}{2^{V-1}}.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron odczytujemy nierówność $V - E + F \leq 2$, która kończy dowód lematu, przez to również uzasadnienie twierdzenia, w konsekwencji niestety niniejszy artykuł. A wszystko zaczęło się tak niewinnie, od sumy kątów w trójkącie...

Dlaczego $|\mathcal{P}| = 2^{V-1}$? Jeśli ustalimy dowolny wierzchołek $v \in \mathcal{V}$, to

$$X \mapsto X \div v$$

zadaje bijekcję między rodziną \mathcal{P} a dopełnieniem tej rodziny.

Od obserwacji Eddingtona do obrazu czarnej dziury

* Black Hole Initiative,
Harvard University

Maciek WIELGUS

W kwietniu 2019 roku mieliśmy okazję zobaczyć pierwszy obraz supermasywnej czarnej dziury w centrum galaktyki M87, zarejestrowany przez Teleskop Horyzontu Zdarzeń (*Event Horizon Telescope*, EHT). Obraz przedstawia niezbyt ostry jasny pierścień, czasem określany jako *cień czarnej dziury*. Szybko zrobił popkulturową karierę, zostając bohaterem licznych memów, ale czy aby wszyscy publikujący jego internetowe przeróbki wiedzą, co tak naprawdę przedstawia? Żeby to wyjaśnić, musimy najpierw cofnąć się w czasie o 100 lat, do początków teorii względności i teorii grawitacyjnego ugięcia promieni światła.