Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2020

Zadania z matematyki nr 797, 798

Redaguje Marcin E. KUCZMA

797. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość h. Punkty M i N to (odpowiednio) środki boków AC i BC. Okrąg przechodzący przez punkty B i N, styczny do prostej BM, przecina prostą AB ponownie w punkcie P. Wyznaczyć największą liczbę λ, dla której (przy każdej takiej konfiguracji) odcinek AP ma długość nie mniejszą niż λh.

798. W nieograniczonym trójkątnym diagramie

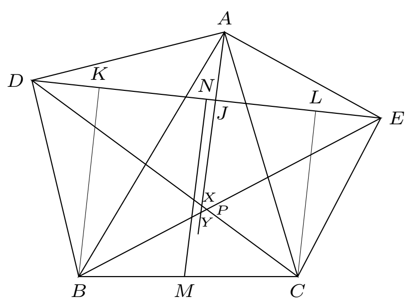
$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 6\ 7\ 6\ 3\ 1 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

w górnym wierszu jest pojedyncza jedynka; a dalej każdy element jest sumą trzech liczb znajdujących się nad nim w poprzednim wierszu ($\searrow, \downarrow, \swarrow$). Wiersze są numerowane od zera; zatem w n-tym wierszu jest $2n+1$ liczb dodatnich.

(a) Wykazać, że w każdym wierszu, poza zerowym i pierwszym, jest jakaś liczba parzysta.

(b) Wyznaczyć numery tych wierszy, w których są dokładnie trzy liczby nieparzyste.

Zadanie 798 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.



Rozwiązania zadań z numeru 11/2019

Przypominamy treść zadań:

789. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie
$$f\big(f(x)+y\big) = 4yf(x) + f(x^2-y) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

790. Na bokach AB, AC trójkąta ostrokątnego ABC, po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABD, ACE z kątami prostymi przy wierzchołkach D, E. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty M i N są środkami odcinków BC i DE. Udowodnić, że każda z prostych MN, AP jest prostopadła do prostej DE.

789. Podstawmy, kolejno, $y = -f(x)$ oraz $y = x^2$; otrzymujemy równania
$$f(0) = -4f(x)^2 + f\big(x^2 + f(x)\big)$$
oraz
$$f\big(f(x) + x^2\big) = 4x^2 f(x) + f(0),$$
które po dodaniu stronami i redukcji dają związek $f(x)\big(f(x) - x^2\big) = 0$. Zatem dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ ma miejsce alternatywa: $f(x) = 0$ lub $f(x) = x^2$. Stąd, w szczególności, $f(0) = 0$.

Jeśli $x = 0$ jest jedynym miejscem zerowym funkcji f, to $f(x) = x^2$ dla wszystkich x. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia zadane równanie. Pozostaje przypadek, gdy f ma jeszcze jakieś miejsce zerowe $a \neq 0$. Wykażemy, że wówczas f jest tożsamościowo równa zeru.

Przypuśćmy, że $f(b) \neq 0$ dla pewnego b. Biorąc w zadanym równaniu $x = a$, $y = b$, dostajemy $f(b) = f(a^2 - b)$; ta liczba nie jest zerem, więc z wcześniejszej alternatywy wynika, że wynosi ona jednocześnie b^2 oraz $(a^2-b)^2$. Przyrównanie tych wartości daje równość $2b = a^2$. To liczba dodatnia; stąd $f \equiv 0$ w przedziale $(-\infty, 0]$. Weźmy teraz dowolną liczbę $c > 0$ i w wyjściowym równaniu podstawmy $y = c$, $x = -\sqrt{c}$ (już wiemy, że $f(-\sqrt{c}) = 0$). Wychodzi $f(c) = 0$. Tak więc $f \equiv 0$ także w przedziale $(0, \infty)$.

Wniosek (odpowiedź): jedynymi funkcjami spełniającymi podane równanie są: $f(x) = 0$ (dla wszystkich x) oraz $f(x) = x^2$ (dla wszystkich x).

790. Niech punkty J, K, L będą rzutami prostokątnymi punktów A, B, C na prostą DE. Trójkąt prostokątny AJD jest przystający do trójkąta DKB; analogicznie, trójkąt AJE przystaje do ELC. Zatem $|JD| = |KB|$, $|JE| = |LC|$, $|AJ| = |DK| = |EL|$. Z ostatniej równości wynika, że środek N odcinka DE jest też środkiem odcinka KL, i wobec tego $MN \perp DE$.

Prosta AJ przecina odcinki CD i BE w punktach, które nazwiemy odpowiednio X i Y. Z proporcji
$$\frac{|JX|}{|DJ|} = \frac{|LC|}{|DL|} = \frac{|JE|}{|DL|} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{|JY|}{|EJ|} = \frac{|KB|}{|EK|} = \frac{|JD|}{|EK|}$$
wyznaczamy
$$|JX| = \frac{|JD| \cdot |JE|}{|DL|} \qquad \text{oraz} \qquad |JY| = \frac{|JD| \cdot |JE|}{|EK|}.$$
Skoro zaś $|DK| = |EL|$, zatem $|DL| = |EK|$, i w takim razie $|JX| = |JY|$. To oznacza, że $X = Y = P$, a prosta AP to prosta AJ, prostopadła (z definicji) do DE.

Klub 44 F

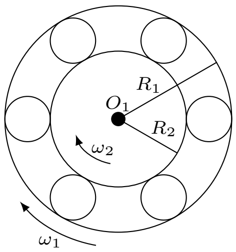
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2020

Zadania z fizyki nr 694, 695

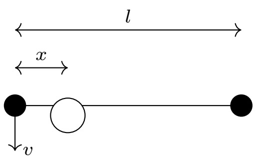
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

694. Statek napędzany jest za pomocą silnika – „miotacza wody”, który wyrzuca z rufy strumień wody z prędkością u. Masa wody pobieranej z rzeki i wyrzucanej w jednostce czasu wynosi μ. Przy jakiej prędkości statku sprawność silnika jest maksymalna? Siłę tarcia i opór wody należy zaniedbać.

695. Rysunek 1 przedstawia przekrój łożyska kulkowego. Promienie pierścieni zewnętrznego i wewnętrznego wynoszą odpowiednio R_1 i R_2, a ich prędkości kątowe ω_1 i ω_2. Opisać ruch jednej z kulek, jeżeli nie występuje poślizg między pierścieniami i kulkami.



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/2019

Przypominamy treść zadań:

686. Dwie małe kulki o masach m, połączone nieważkim prętem o długości l, spoczywają na gładkim stole. W odległości x od jednej z kulek znajduje się wbity w powierzchnię stołu kołek. W chwili początkowej odległość między prętem a kołkiem jest bardzo mała (rys. 2). Kulka położona bliżej kołka została uderzona w kierunku równoległym do powierzchni stołu i prostopadłym do pręta i w bardzo krótkim czasie uzyskała prędkość v. Następnie pręt zderzył się sprężyście z kołkiem. Jaka powinna być odległość x, aby po zderzeniu pręt nie obracał się?

687. Znaleźć promień największej kropli wody, która może wyparować, nie pobierając ciepła z otoczenia. Ciepło parowania wody wynosi $q = 2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ J/m^2. Zakładamy, że temperatura kropli nie zmienia się.

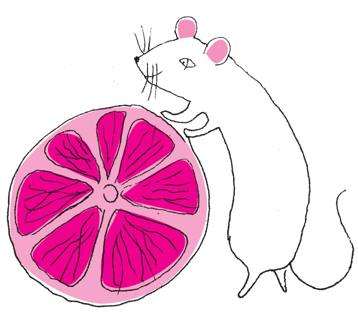
686. Po uderzeniu kulki ruch postępowy układu z prędkością V opisuje równanie $F\Delta t = 2$mV, gdzie F jest średnią siłą działającą na kulkę w czasie zderzenia Δt. Równanie ruchu obrotowego układu z prędkością kątową ω wokół środka masy ma postać $Fl/2\Delta t = 2m\,(l/2)^2\,\omega$, stąd $V = \omega l/2$. Ruch kulki, której nadano prędkość v, jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego, zatem $v = V + \omega l/2 = \omega$, $V = v/2$. Prędkość drugiej kulki wynosi $v_2 = V - \omega l/2 = 0$. Po zderzeniu sprężystym z kołkiem ruch układu jest ruchem czysto postępowym, zasada zachowania energii ma więc postać $mv^2/2 = 2mV_x^2/2$, gdzie $V_x = v/\sqrt{2}$ jest prędkością układu po zderzeniu. Oznaczając przez F_1 średnią siłę działającą na pręt w czasie Δt_1 podczas zderzenia z kołkiem, możemy napisać równanie ruchu postępowego: $F_1\Delta t_1 = 2m \mid V_x - V \mid = 2m\,(V_x + V)$ oraz równanie ruchu obrotowego: $F_1\Delta t_1\,(l/2 - x) = 2m\,(l/2)^2\,\omega$. Rozwiązując powyższe równania, otrzymujemy szukaną odległość

$$x = l(2 - \sqrt{2})/2.$$

687. Przy założeniu, że temperatura kropli, a tym samym jej energia wewnętrzna, nie zmienia się, energia potrzebna do parowania może pochodzić tylko z energii powierzchniowej. Rozważmy sytuację, gdy promień kropli maleje o małą wielkość ΔR. Objętość kropli maleje wtedy o $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$, a masa wyparowanej przy tym wody jest równa $m = \rho\Delta V$, gdzie ρ jest gęstością wody. Ciepło potrzebne do wyparowania masy m wody wynosi $Q = Lm = 4\pi\rho R^2\Delta R$. Pole powierzchni kropli maleje o $\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi\,(R - \Delta R)^2 \cong 8\pi R\Delta R$. Energia powierzchniowa maleje przy tym o $\Delta W = \sigma\Delta S$. Z bilansu energetycznego $Q = \Delta W$ otrzymujemy

$$R = 2\sigma/\,(\rho L) \cong 10^8 \text{ cm}.$$

Otrzymaliśmy, że szukany promień jest rzędu odległości międzycząsteczkowych, zatem żadna kropla wody nie może wyparować, nie pochłaniając ciepła z zewnątrz.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.