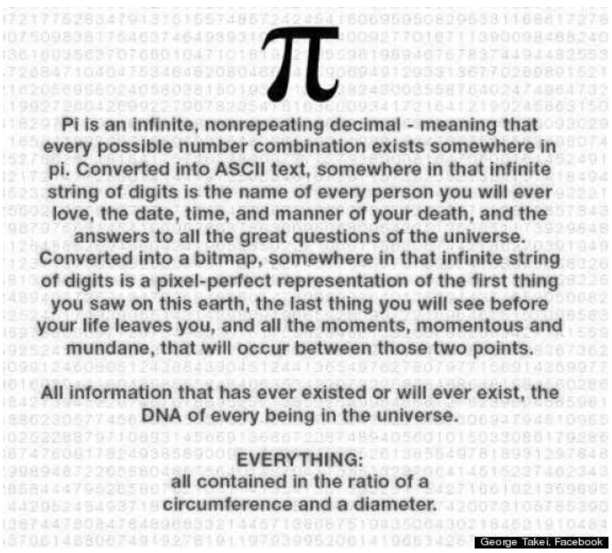
Czy π jest normalna?

Łukasz RAJKOWSKI

Być może nie wypada zadawać tytułowego pytania w numerze marcowym, gdyż w tym miesiącu obchodzone jest wspaniałe święto tej największej bodaj celebrytki pośród liczb rzeczywistych, jednak *Delta* nie pozwoli zakneblować sobie ust poprawnością polityczną. Tym bardziej, że w Internecie roi się od plotek i pogłosek na ten temat. Zamieszanie rozpoczęło się od utworzonego w dobrej wierze memu (zamieszczony poniżej), którego autor w poetycki sposób opisywał rzekomą, mistyczną własność π – jej rozwinięcie dziesiętne miałoby skrywać wszelkie tajemnice tego świata i odpowiedzi na wszystkie fundamentalne dla ludzkości pytania.



Mem w wolnym tłumaczeniu (redakcja odcina się od zawartych tu stwierdzeń): *Pi jest liczbą o nieskończonym i nieokresowym rozwinięciu dziesiętnym – co oznacza, że dowolna kombinacja cyfr pojawi się gdzieś w tym rozwinięciu. Jeśli potraktować ją jako kod ASCII pewnego tekstu, gdzieś w tym nieskończonym ciągu znajdą się imiona wszystkich osób, które kiedykolwiek pokochasz, czas i okoliczności twojej śmierci oraz odpowiedzi na wszystkie wielkie zagadki Wszechświata. Po przekształceniu w bitmapę, gdzieś w tym rozwinięciu pojawi się pierwsze, co ukazało się twoim oczom przy przyjściu na świat, i ostatnie co ujrzysz, z tego świata odchodząc, a także wszystkie momenty, wzniosłe i przyziemne, które nastąpią pomiędzy. Cała informacja, istniejąca i ta, która jeszcze powstanie, a także DNA każdej żyjącej istoty. WSZYSTKO zawarte w stosunku obwodu do średnicy.*

Sama π nie potwierdziła ani nie zaprzeczyła tej pogłosce, twierdząc, że pytania o naturę jej rozwinięcia dziesiętnego godzą w jej prywatność. O komentarz w tej sprawie poprosiliśmy zaprzyjaźnionego z redakcją eksperta, prof. dra hab. inż. Piotra Pipińskiego.

ŁR: *Zapytam bez ogródek: co Twoim zdaniem π skrywa w teczkach swojego rozwinięcia dziesiętnego? Co na ten temat mówi nauka?*

PiPi: Pogłoski, jakoby w rozwinięciu dziesiętnym π można było odnaleźć wszystko, pomimo wysiłków uczonych, nie zostały niestety zweryfikowane. Przez „wszystko” rozumiemy dowolną skończoną kombinację cyfr. Na przykład własną datę urodzenia – to akurat możemy zrobić, zaglądając na stronę internetową `http://www.mypiday.com/`. Albo tysiąc zer, jedno obok drugiego – takiego miejsca jednak nie potrafimy wskazać i jednocześnie nie potrafimy udowodnić, że na pewno istnieje. Nawet jednak gdybyśmy potrafili zweryfikować te plotki, to dużo bardziej interesująca jest dla nas kwestia bardziej szczegółowa – chcielibyśmy bowiem dowiedzieć się, czy π jest *liczbą normalną*. Normalną, czyli mającą pewne własności losowej liczby rzeczywistej.

ŁR: *„Losowej liczby rzeczywistej”? Co należy przez to rozumieć i o jakiej własności mowa?*

PiPi: Zastanówmy się, jak moglibyśmy wylosować liczbę rzeczywistą z przedziału $[0, 10)$. Najpierw losujemy cyfrę jedności, każdą z jednakowym prawdopodobieństwem. Następnie to samo robimy z kolejnymi cyframi po przecinku: dziesiętnych, potem setnych i tak dalej. Załóżmy, że byliśmy nieskończenie cierpliwi i w ten sposób wygenerowaliśmy wszystkie cyfry rozwinięcia dziesiętnego pewnej liczby X. Wówczas częstotliwość występowania cyfry 1 w pierwszych 10, 100, 1000 (i tak dalej) cyfrach rozwinięcia dziesiętnego X praktycznie zawsze coraz lepiej przybliża $\frac{1}{10}$. Obowiązek ten wynika ze specjalnej ustawy regulującej gry hazardowe, nazywanej Mocnym Prawem Wielkich Liczb. Obejmuje ona wszystkie cyfry, nie tylko 1, a także dowolne skończone kombinacje cyfr, z tą modyfikacją, że ustalony ciąg cyfr długości d ma się pojawiać, mówiąc potocznie, raz na 10^d cyfr. W oschłym języku matematycznego ustawodawstwa zależność ta brzmi:

dla każdej kombinacji cyfr długości d granica podzielonej przez n liczby wystąpień tej kombinacji wśród pierwszych n cyfr rozwinięcia dziesiętnego X wynosi 10^{-d}.

Właśnie tę cechę liczby X nazywamy normalnością, a dokładniej: *normalnością w podstawie* 10, gdyż w podobny sposób można określić normalność w innych podstawach – wystarczy patrzeć nie na rozwinięcia dziesiętne, a dwójkowe, trójkowe itp. Pojęcie to ukuł Émile Borel – w 1909 roku wykazał, że losowa liczba rzeczywista jest na 100% *absolutnie normalna*, czyli normalna w każdej podstawie.

ŁR: *Czyli jeśli z zamkniętymi oczami zaznaczyłbym na osi liczbę rzeczywistą, to byłaby ona normalna, tak? A czy można wskazać konkretne przykłady?*

PiPi: Jest to dość zabawna kwestia, gdyż nie jest tak łatwo wskazać konkretny przykład, choć prawie każda liczba rzeczywista jest normalna. Można pokazać, że tzw. *stała Champernowne'a*, czyli $0{,}123456789101112\ldots$, jest normalna w bazie 10. Dużo trudniej uzasadnić, że liczba $0{,}2357111317\ldots$, powstała przez „sklejenie" kolejnych liczb pierwszych, jest normalna w podstawie 10. Udowodnili to dopiero Arthur Copeland i Paul Erdős w 1946 roku. To nie jedyna istotna zasługa Erdősa w badaniu normalności! Wraz z Haroldem Davenportem w 1952 roku pokazali, że normalna w bazie 10 jest dowolna liczba postaci $0{,}w(1)w(2)w(3)\ldots$, gdzie w jest niestałym wielomianem, który dla naturalnych argumentów przyjmuje naturalne wartości, np. $w(n) = n^2$.

ŁR: *Kręcimy się cały czas wokół normalności w podstawie* 10*. A co ze wspomnianą przez Ciebie absolutną normalnością? Czy tutaj znane są jakieś przykłady?*

PiPi: To jest bardzo dobre pytanie i odpowiedź na nie jest dość niewygodna. Faktycznie, wspomniane przeze mnie stałe albo *nie są*, albo *nie wiadomo, czy są* absolutnie normalne. Tutaj również znane są przykłady, jednak ich konkretność może wydawać się niektórym Czytelnikom dyskusyjna. Pierwszą „dobrze zdefiniowaną" liczbę absolutnie normalną podał nasz rodak, Wacław Sierpiński. Jego konstrukcja niestety nie nadaje się do publikacji w prasie codziennej. Dość powiedzieć, że wyznacza on pewną przeliczalną rodzinę odcinków o wymiernych końcach. Okazuje się, że odcinki te nie pokrywają całego przedziału $(0, 1)$, a liczby, które nie zostaną pokryte, muszą być absolutnie normalne. Opierając się na tej konstrukcji, Verónika Becher i Santiago Figueira pokazali, jak wyznaczać kolejne cyfry pewnej absolutnie normalnej liczby z dowolną dokładnością. Oczywiście nie ma najmniejszego sensu wypisywać poniżej pierwszych cyfr rozwinięcia dziesiętnego ich wyniku; normalność nie zależy od tego, jak liczba zaczyna, a od tego, jak kończy. Mając liczbę normalną, możemy po przecinku dopisać jej dowolny ciąg cyfr i nie przestanie ona być normalna. Czyli faktycznie liczy się tylko to, że możemy przybliżyć tę absolutnie normalną liczbę z dowolną dokładnością, a nie to, co dostajemy na początku.

ŁR: *Robi się strasznie abstrakcyjnie, powróćmy zatem do konkretu. Czy zatem π jest normalna, czy nie jest?*

PiPi: Tak jak już wspominałem – nie wiadomo. Znamy już jednak bardzo wiele cyfr rozwinięcia dziesiętnego π. Ostatni rekord należy do Emmy Haruka Iwao, która obliczyła π z dokładnością do ponad $3 \cdot 10^{13}$ (a dokładnie $\lfloor \pi \cdot 10^{13} \rfloor$, co jest dość urokliwe) cyfr. To dużo – zwykły plik tekstowy zawierający to rozwinięcie zająłby pewnie ponad $1\,\mathrm{TB} = 10^3\,\mathrm{GB}$, zatem nie zmieściłby się pewnie na komputerze większości Czytelników *Delty*. Na podstawie tej próbki nie stwierdzono żadnych odchyleń π od normalności. Nawet więcej: uzyskanego ciągu cyfr nie da się żadnymi statystycznymi metodami odróżnić od losowego ciągu cyfr. Oczywiście, niezależnie od tego, jak wiele cyfr rozwinięcia dziesiętnego π uzyskamy, nie przybliża nas to do dowodu normalności – jest to jedynie (bardzo mocna, ale jednak) sugestia. W tym momencie warto wspomnieć o pewnej anegdotycznej historii. Otóż w roku 1872 August de Morgan poczynił spostrzeżenie, że w znanym ówcześnie rekordowo długim rozwinięciu π (608 cyfr), opublikowanym przez Williama Shanksa w 1853 roku, występuje zaskakująco niewiele siódemek. Widać to na poniższej tabelce, prezentującej liczbę wystąpień poszczególnych cyfr w rozwinięciu Shanksa.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

De Morgan poprawnie ocenił prawdopodobieństwo tak istotnego odstępstwa cyfry 7 od „przeciętności" – na ok. 2%, co uznał za pewną osobliwość. Należy tu poczynić statystyczną dygresję i zaznaczyć, że tak naprawdę powinien był on zastanowić się nad prawdopodobieństwem takiego odstępstwa u „najbardziej odstępującej" cyfry; mierzona w ten sposób „niezwykłość" rozwinięcia Shanksa wynosiłaby już tylko ok. 20%. Tak czy inaczej, de Morgan nie traktował swojej obserwacji jako zarzut wobec obliczeń Shanksa (przynajmniej nie sformułował tego zarzutu na piśmie), a raczej jako ciekawostkę, uszczypliwie komentując, że niezwykłość siódemki w tym względzie może być wodą na młyn wszelkiego rodzaju mistyków (zwłaszcza że najczęstszą z występujących w rozwinięciu jest inna magiczna liczba, czyli 3). Dopiero w latach czterdziestych XX wieku D. F. Ferguson wskazał na błąd w obliczeniach Shanksa. Pomyłka pojawiła się dopiero na 528 miejscu, jednak propagowała na kolejne cyfry rozwinięcia.

ŁR: *Z naszej rozmowy wyłania się dość przygnębiający obraz stanu naszej wiedzy. Nie wiadomo, czy π jest normalna. Nie wiadomo, czy w rozwinięciu dziesiętnym π można znaleźć dowolną skończoną kombinację cyfr. O ile mi wiadomo, nie wiadomo nawet, czy w tym rozwinięciu znajduje się nieskończenie wiele zer (jedynek, dwójek, ...). Czy na zakończenie może Pan wspomnieć o czymś, co wiadomo w tej kwestii?*

PiPi: Przyparty do muru mogę jedynie przypomnieć, że π jest liczbą niewymierną (a nawet niealgebraiczną), zatem nie może być tak, że w jej rozwinięciu dziesiętnym od pewnego miejsca po przecinku powtarzają się kolejne cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego (począwszy od pierwszej). Osobiście uważam jednak, że niewiedza w tak elementarnej (przynajmniej w warstwie sformułowania) kwestii może mieć bardzo pozytywne skutki, gdyż ze względu na prostotę określenia problemu może potencjalnie więcej osób zainspirować do pogłębiania swojej wiedzy... Czego życzę wszystkim Czytelnikom *Delty*.