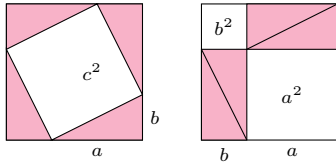


# Trudniej, a łatwiej

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL

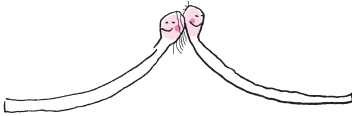


Są twierdzenia łatwe i trudne do udowodnienia. Zazwyczaj im mocniejsze sformułowanie, obejmujące więcej przypadków, tym trudniej się je dowodzi. Tak jest na przykład z twierdzeniem cosinusów i twierdzeniem Pitagorasa, które jest jego szczególnym przypadkiem. Łatwiej jest udowodnić twierdzenie Pitagorasa; można to zrobić nawet w sposób zrozumiały dla przedszkolaka (zobacz rysunek obok). Do dowodu twierdzenia cosinusów trzeba przynajmniej wiedzieć, co to cosinus, w szczególności kąta rozwartego.

Jest jednak metoda dowodzenia, w której dowody mocniejszych twierdzeń bywają łatwiejsze niż ich sformułowań mniej ogólnych. To indukcja matematyczna.

Weźmy taki przykład. Postarajmy się udowodnić, że suma sześciątów początkowych  $n$  liczb naturalnych jest pełnym kwadratem, czyli kwadratem pewnej liczby naturalnej. Spróbujmy dowodu indukcyjnego. Sprawdzamy bazę dla  $n = 1$ . Działa:  $1^3 = 1^2$ , czyli suma pojedynczego sześciatu jedynki jest kwadratem jedności (dla  $n = 0$  zresztą też działa!). Załóżmy teraz, że  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = m^2$  dla pewnego naturalnego  $m$ . Mamy wykazać, że  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = m'^2$  dla pewnej liczby naturalnej  $m'$ . Stosujemy założenie indukcyjne:  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = m^2 + (n+1)^3 \dots$  i klops! Tego się nie da już doprowadzić do niczego sensownego. Dowód się zaczyna.

Wystarczy jednak wzmocnić nieco tezę: nie tylko twierdzić, że jest to pełny kwadrat *jakiejś* liczby, ale ją bezpośrednio wskazać: tą liczbą jest suma początkowych  $n$  liczb naturalnych, czyli  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Nasze mocniejsze twierdzenie mówi, że  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . Teraz krok indukcyjny działa bez zarzutu: Zakładamy, że  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ , i dowodzimy, że  $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ . Elementarne rachunki nas w tym upewniają:  $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ .



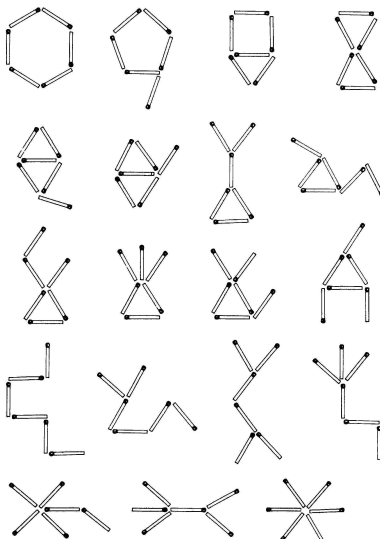
Co się stało? Po prostu z mocniejszych założeń wyciągamy więcej wniosków. A że założenie jest częściowo tezą? Tym lepiej! Nic dziwnego, że przy indukcji matematycznej krok indukcyjny dowodzi się prościej, gdy założenie jest silniejsze. Zobaczmy jeszcze jeden przykład.

Spróbujmy wykazać, że dla każdego  $n$  wartość  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^n k^{-3}$  jest mniejsza od  $\frac{5}{4}$ . Gdybyśmy użyli zwykłej indukcji, to co prawda baza indukcji by była prawdziwa, bo  $1 < \frac{5}{4}$ , ale z krokiem indukcyjnym byłoby już trudniej. Załóżmy bowiem, że  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$ . Mamy wykazać, że  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4}$ . I widać gołym okiem, że założenie indukcyjne do niczego nam się nie przyda. Co z tego, że suma odwrotności sześciątów aż do  $n$  włącznie jest mniejsza od  $\frac{5}{4}$ , skoro nie wiemy, o ile jest mniejsza i czy  $\frac{1}{(n+1)^3}$  tam się jeszcze zmieści?

Widać, że dużego pola manewru nie mamy. Po prostu założenie indukcyjne było zbyt słabe. Spróbujmy zatem wzmocnić tezę, twierząc, że nie tylko ta suma jest mniejsza od  $\frac{5}{4}$ , ale wręcz od  $\frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$ .

Co? Że to wcale nie jest prawda? Faktycznie: już dla  $n = 1$  ta nierówność nie zachodzi. Dla  $n = 2$  również, nawet dla  $n = 3$  okazuje się, że  $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27}$  przekracza wartość  $\frac{5}{4} - \frac{1}{9}$ . Ale dla  $n = 4$  już jest OK:  $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} < \frac{5}{4} - \frac{1}{16}$ , co można sprawdzić za pomocą kalkulatora, albo nawet bez.

Teraz już jest łatwo. Stawiamy hipotezę indukcyjną, że dla  $n \geq 4$  zachodzi  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$ . Baza już jest udowodniona. Pozostaje krok indukcyjny. Zakładamy zatem, że  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$ , i wykazemy, że  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$ . To już jest proste.



Wszystkie topologicznie różne układy sześciu zapalek; szczegóły w artykule Jarosława Górnickiego *Zabawa zapalkami* (str. 6).

Mamy bowiem na mocy założenia indukcyjnego  $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$ , a wykazanie, że prawa strona tej nierówności jest mniejsza od  $\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$ , to już jest elementarna algebra. Wystarczy obie strony przemnożyć przez niewątpliwie dodatnią wartość  $n^2(n+1)^3$  i zredukować powstałą nierówność do równoważnej oczywistej  $-n^2 - 3n - 1 < 0$ .

W ten sposób udowodniliśmy, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich  $n \geq 4$ . Przypadki, gdy  $n < 4$ , możemy sprawdzić ręcznie – ostatecznie dla  $n = 0, 1, 2, 3$  liczb po prostu wyjściowa nierówność jest spełniona z prawą stroną równą  $\frac{5}{4}$ , a dla  $n \geq 4$  nawet mocniejsza, z odjętym składnikiem  $\frac{1}{n^2}$  po prawej stronie.

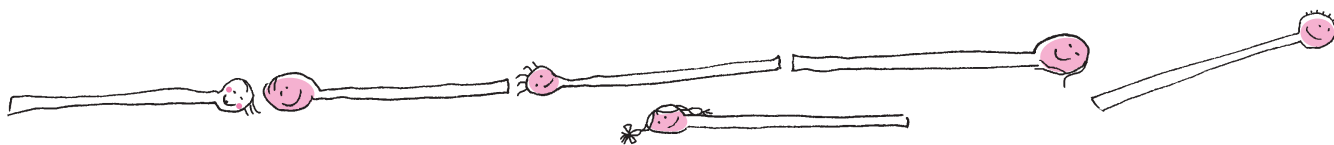
Przy okazji można zadać narzucające się pytanie: czy  $\frac{5}{4}$  jest najlepszym przybliżeniem sumy nieskończonego szeregu odwrotności sześcianów? Wiemy, że ciąg jego sum częściowych rośnie wraz z  $n$  i ma ograniczenie górne, więc z twierdzenia Weierstrassa wynika, że ma granicę. Czy jest nią  $\frac{5}{4}$ ? Nie. Można lepiej oszacować tę wartość z góry. Próbowało tego wielu matematyków; pierwszym chyba był Euler, któremu nie udało się rozwiązać zagadki do końca. Podał co prawda związek tej granicy, z której istnienia zdawał sobie zresztą sprawę, z innymi sumami parzystych potęg odwrotności liczb naturalnych.

Choć udało mu się wyznaczyć dokładne postacie granic szeregów z drugimi i czwartymi potęgami,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  oraz  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ , to na trzeciej potędze się zaciął.

Nic dziwnego. Mimo z górą dwustuletnich starań matematyków do dziś nie znamy wyrażenia definiującego tę wartość; nie wiemy, czy w ogóle takie wyrażenie istnieje. Znamy ponad bilion (czyli  $10^{12}$ ) cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby, którego początek to 1,2020569031595942853997381615. Wiemy, że jest to liczba niewymierna, choć zostało to udowodnione dopiero w roku 1978 przez francuskiego matematyka Rogera Apéry'ego i od jego nazwiska stała ta jest od tej pory nazywana stałą Apéry'ego. Pojawia się ona zresztą w naturalny sposób przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień fizycznych, jak wyznaczanie współczynnika żyromagnetycznego (ilorazu momentu magnetycznego przez moment obrotowy), a także informatycznych przy analizie minimalnych losowych drzew rozpinających graf.

Nie wiemy do tej pory, czy liczba ta jest algebraiczna i czy kiedykolwiek poznamy jej symboliczną postać odnoszącą się na przykład do znanych stałych, takich jak  $\pi$  czy  $e$ . Zagadkowa sprawa.

Liczba jest algebraiczna, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Na przykład  $\sqrt{2}$  jest algebraiczny, ponieważ jest pierwiastkiem wielomianu  $x^2 - 2$ .



## Zadania

Przygotował *Lukasz BOŻYK*

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że wieża szachowa *atakuje* inną wieżę, jeśli znajduje się w tej samej linii szachownicy (tj. wierszu lub kolumnie) i pomiędzy nimi w tej linii nie znajduje się żadna inna wieża.

**M 1627.** Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy  $m \times n$  w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie jedną inną wieżę.

Rozwiązanie na str. 9

**M 1628.** Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy  $m \times n$  w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie dwie inne wieże.

Rozwiązanie na str. 9

**M 1629.** Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy  $m \times n$  w taki sposób, aby każda wieża, która nie znajduje się w narożniku szachownicy, była atakowana przez dokładnie trzy inne wieże.

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował *Andrzej MAJHOFER*

**F 993.** W kolejnych próbach na torze kierowca sprawdza, jaką maksymalną prędkość osiąga nowy model sportowego samochodu. W pierwszej próbie jechał bez pasażerów i osiągnął prędkość  $v_1 = 200$  km/godz. Podczas drugiej próby zabrał do kabiny samochodu 4 inżynierów. Oszacuj, jaką prędkość  $v_2$  kierowca osiągnął w drugiej próbie, jeżeli samochód z kierowcą ma masę 1200 kg, a każdy z inżynierów to dodatkowe 80 kg. Próby były wykonywane w takich samych warunkach i nie zostały w nich osiągnięte granice „wydolności” silnika.

Rozwiązanie na str. 14

**F 994.** W słynnym doświadczeniu Ottona von Guerickego dwa zaprzęgi po 8 koni rozrywały dwie szczelnie przylegające do siebie miedziane półkule, z których wnętrza wypompowano powietrze. Zakładając, że wewnątrz półkul o średnicy  $d = 42$  cm była niemal doskonała próżnia, oszacuj siłę potrzebną do ich rozerwania.

Rozwiązanie na str. 8