

Problem komiwojażera w praktyce

*Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Łukasz KOWALIK*

Korzystając z popularnych serwisów internetowych, błyskawicznie znajdziemy najkrótszą trasę między dwoma miastami. A co, gdybyśmy chcieli znaleźć najkrótszą trasę, która pozwoli po wyruszeniu z domu odwiedzić wszystkie interesujące nas miasta i wrócić do punktu wyjścia?

Możemy to pytanie sformalizować w następujący sposób. Wybrane miasta (wraz z tym, w którym mieszkamy) numerujemy od 1 do n . Zakładamy, że mamy tabelę $n \times n$ o wartościach d_{ij} dla $i, j = 1, \dots, n$, gdzie d_{ij} oznacza odległość (np. podaną przez nasz ulubiony serwis) z miasta i do miasta j . Tabela jest symetryczna, tzn. $d_{ij} = d_{ji}$. Naszym celem jest znalezienie kolejności odwiedzania miast, czyli permutacji v_1, \dots, v_n , która minimalizuje długość trasy, tzn. $\sum_{i=0}^n d_{v_i v_{i+1}}$, przyjmując $v_0 = v_n$. To zadanie znane jest jako *problem komiwojażera* i od kilkudziesięciu lat spędza sen z oczu informatykom.

Z jednej strony jest to problem NP-trudny, a najlepszy w sensie złożoności pesymistycznej algorytm działa w czasie $O(2^n n^2)$. Z drugiej strony, istnieją implementacje, które dla instancji pochodzących ze świata rzeczywistego uzyskują spektakularne wyniki (tabela poniżej), ale ich pesymistyczna złożoność czasowa nie jest znana.

rok	autorzy	liczba miast
1954	Dantzig, Fulkerson, Johnson	49
1977	Grötschel	120
1987	Padberg, Rinaldi	2 392
2004	Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, Helsgaun	24 978
2016	Cook, Espinoza, Goycoolea, Helsgaun	49 603

Wszystkie powyższe rekordy dotyczą optymalnych rozwiązań dla rzeczywistych map połączeń drogowych (w USA, Niemczech, Szwecji), z wyjątkiem rekordu Manfreda Padberga i Giovanniego Rinaldiego, którzy znaleźli najkrótszą trasę dla wiertarki wierzącej otwory w płycie obwodu drukowanego. Aktualnie rozwiązanie problemu na zwykłym laptopie dla 1000 miast to kwestia kilkudziesięciu sekund, ale już wynik z ostatniego wiersza tabelki (2016) uzyskano za pomocą 310 procesorów pracujących przez 8 miesięcy. Choć pierwszy wiersz tabelki wygląda skromnie, w rzeczywistości stanowi wielkie osiągnięcie, a kolejne rekordy były wynikiem rozwinięcia technik wypracowanych przez George'a Dantziga, Delberta Fulkersona i Selmera Johnsona. W dalszej części artykułu zobaczymy, jak działa ich metoda na nieco bliższym nam przykładzie 51 dużych miast w Polsce.

Kluczowy pomysł polega na zapisaniu naszego problemu jako zbioru równań i nierówności liniowych. Dla każdej pary różnych miast $i, j = 1, \dots, 51$ wprowadzmy zmienną x_{ij} , przy czym x_{ij} oraz x_{ji} traktujemy jako dwie nazwy tej samej zmiennej. Na początek przyjmijmy, że

zmienne x_{ij} mogą przyjmować tylko dwie wartości: 0 i 1. Myślimy o nich w ten sposób, że połączenie między i oraz j jest używane w naszym rozwiązaniu wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{ij} = 1$. Zauważmy, że długość takiej trasy wynosi $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x_{ij}$.

Czy możemy za pomocą prostych równań i nierówności wymusić, aby spełniające je wartości zmiennych odpowiadały dokładnie możliwym trasom komiwojażera (czyli cyklom długości n)? Pierwsza obserwacja jest prosta: dla każdego miasta i dokładnie *dwie* zmienne x_{ij} powinny mieć wartość 1, co można wyrazić jako $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$. To jednak nie wystarczy, gdyż zamiast jednej trasy moglibyśmy dostać kilka krótszych, rozłącznych cykli (w skrajnym przypadku $n/3$ rozłącznych trójkątów).

Aby zagwarantować, że miasta z pewnego zbioru S nie tworzą krótszej trasy, możemy dodać warunek *eliminacji podtras*, który mówi, że do tego zbioru musimy co najmniej jeden raz wejść i co najmniej jeden raz z niego wyjść. Zwykle ten warunek zapisujemy w równoważnej formie $\sum_{i, j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1$ (czyli $\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2$). Równoważność łatwo dostaniemy, mnożąc oryginalną nierówność przez -1 , dodając do niej równość $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$ dla wszystkich $i \in S$ i dzieląc otrzymaną nierówność przez 2. Niestety, taki warunek musimy dodać dla każdego zbioru miast S o mocy między 3 a $\lfloor n/2 \rfloor$. Otrzymujemy następujące zadanie, które jest przykładem tzw. *programu liniowego całkowitoliczbowego*.

Zminimalizuj $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x_{ij}$ przy ograniczeniach

- $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$, dla $i = 1, \dots, n$,
- $\sum_{i, j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1$, dla $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ i $3 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$, dla $1 \leq i < j \leq n$.

Skąd pomysł na zapisanie problemu w języku równań i nierówności liniowych? Otóż teraz rozluźniamy założenia naszego zadania: warunki $x_{ij} \in \{0, 1\}$ zamieniamy na $0 \leq x_{ij} \leq 1$ i szukamy rozwiązania w liczbach rzeczywistych. Wówczas otrzymujemy tzw. *program liniowy*. Tak się składa, że nasi bohaterowie umieli szybko rozwiązywać programy liniowe, gdyż jeden z nich, George Dantzig, w 1947 roku opublikował do dziś najskuteczniejszy w praktyce algorytm realizujący ten cel, nazywany algorytmem *simplex*. Jest on obecnie dostępny w bibliotekach dla wielu popularnych języków programowania, np. przygotowując ten artykuł, użyliśmy modułu PuLP dla języka Python.

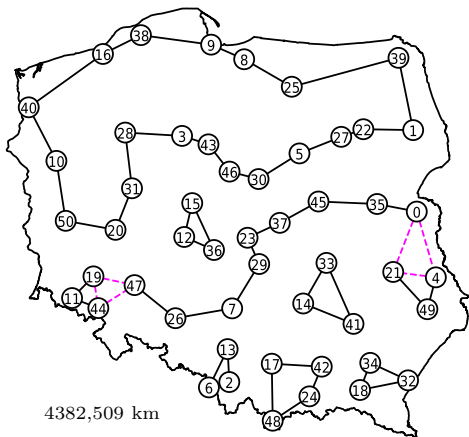
Plan jest następujący. Jeśli szczęśliwie jako rozwiązanie optymalne naszego programu liniowego dostaniemy same zera i jedynki, to będą one definiowały pewną trasę, która musi być optymalna, ponieważ *każda* trasa komiwojażera spełnia wszystkie warunki programu. Niestety może się okazać, że dostaniemy rozwiązanie *ułamkowe*, w którym niektóre zmienne będą miały wartość w przedziale $(0, 1)$. Wtedy będziemy musieli jakoś zareagować.

Dodatkowy kłopot polega na tym, że nasz program liniowy ma gigantyczną liczbę warunków eliminacji podtras: tylko dla $|S| = 25$ jest ich $\binom{51}{25} = 247\,959\,266\,474\,052$. To za dużo nawet dla współczesnych komputerów. Pomysł Dantziga i jego kolegów polegał na tym, aby zacząć od prostego programu liniowego postaci:

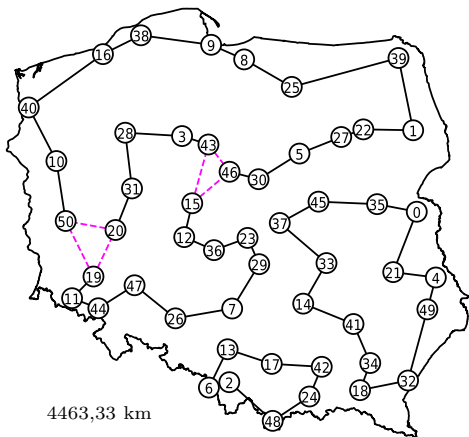
Zminimalizuj $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij}x_{ij}$ przy ograniczeniach

- $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$, dla $i = 1, \dots, n$,
- $0 \leq x_{ij} \leq 1$, dla $1 \leq i < j \leq n$;

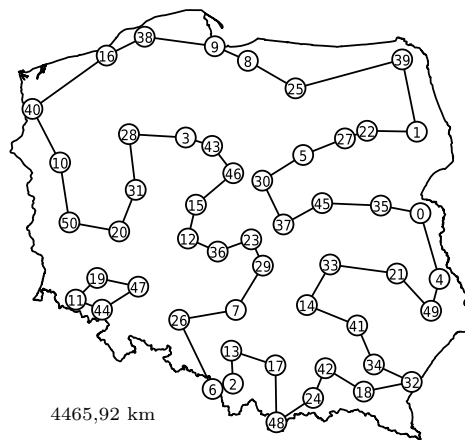
a następnie dodawać warunki w miarę potrzeby. Taki program ma $\binom{51}{2} = 1275$ zmiennych i 2601 warunków liniowych. Uruchamiamy na komputerze algorytm simplex i w ułamku sekundy dostajemy poniższe rozwiązanie.



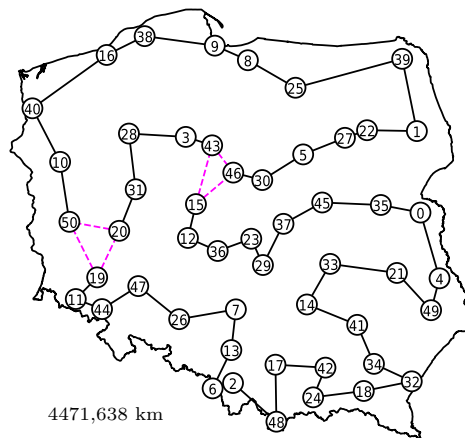
Liniami ciągłymi oznaczyliśmy zmienne o wartości 1, natomiast przerywanymi o wartości $\frac{1}{2}$ (innych ułamkowych wartości w uzyskanym rozwiązaniu nie było). Widzimy, że możemy dodać warunki eliminacji podtras dla zbiorów $\{14, 33, 41\}$, $\{2, 6, 13\}$, $\{32, 34, 18\}$, $\{17, 24, 42, 48\}$ oraz $\{12, 15, 36\}$. Chociaż miasta 4, 21 i 49 nie utworzyły krótkiego cyklu, zauważmy, że dla $S = \{4, 21, 49\}$ oraz dla $S = \{11, 44, 19\}$ warunek eliminacji podtras też nie jest spełniony; dodajemy więc jeszcze te dwa warunki i ponownie uruchamiamy algorytm.



W nowym rozwiązaniu mamy nowe krótkie cykle, dodajemy warunki eliminacji podtras dla kolejnych dwóch zbiorów $\{2, 6, 13, 17, 42, 24, 48\}$ oraz $\{4, 21, 0, 35, 45, 37, 33, 14, 41, 34, 18, 32, 49\}$ i generujemy kolejne rozwiązanie.



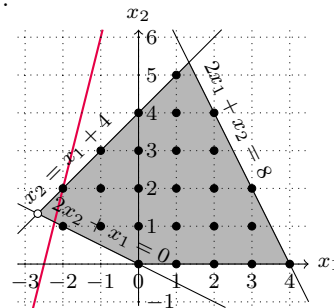
Otrzymaliśmy dwa cykle, a więc dodajemy warunek eliminacji podtras dla krótszego z nich o zbiorze wierzchołków $\{11, 19, 44, 47\}$. Efekt kolejnego uruchomienia algorytmu simplex widzimy poniżej.



Niestety *wszystkie* warunki eliminacji podtras są spełnione, a jednak nie uzyskaliśmy pojedynczego cyklu. Jest to spowodowane dopuszczeniem ułamkowych wartości zmiennych. Ratunkiem w takiej sytuacji jest znalezienie nowej nierówności, którą spełniają trasy komiwojażera, ale nie spełnia jej nasze rozwiązanie. Takie nierówności nazywamy *plaszczynami odcinającymi*. Dlaczego? Wyobraźmy sobie, że nasz program liniowy ma tylko dwie zmienne, a wszystkie warunki to nierówności. Wówczas zbiór punktów spełniających te warunki jest wielokątem na płaszczyźnie, jak poniżej.

Zminimalizuj x_1 przy ograniczeniach

- $x_2 \leq x_1 + 4$,
- $2x_1 + x_2 \leq 8$,
- $2x_2 + x_1 \geq 0$,
- $x_2 \geq 0$.



Algorytm simplex ma tę własność, że zwraca nam rozwiązanie optymalne, które jest wierzchołkiem wielokąta. Tymczasem my szukamy całkowitoliczbowego rozwiązania optymalnego. Możemy wówczas do programu liniowego dodać nierówność, która oddzieli nasz wierzchołek od wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych wewnątrz wielokąta, odcinając fragment wielokąta

