O nierównościach typu Dirananda–Shapiro

E-mail autora: `piotr-kumor@wp.pl`

Piotr KUMOR

Zacznijmy od przypomnienia zadania 766 z *Klubu 44M* (Δ^9_{18}):

Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > \frac{5}{2}$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geqslant M.$$

Im większa liczba M, tym lepsze rozwiązanie.

Powyższy problem można w naturalny sposób sformułować w ogólniejszej postaci. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą oraz $\alpha > 0$ liczbą rzeczywistą. Oznaczmy przez $S(n, \alpha)$ największe ograniczenie dolne wartości sumy $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^\alpha$, gdzie $x_1, \ldots, x_n > 0$. Wówczas zadanie 766 to pytanie o jak najlepsze oszacowanie $S(5, \frac{1}{5})$ z dołu. Co wiadomo w tej kwestii dla ogólnych wartości n i α?

Dla $\alpha = 1$ zagadnienie jest znane jako *problem Shapiro*. Ma on długą i barwną historię, która rozpoczęła się od zadania zaproponowanego przez Joela Shapiro w 1954 roku na łamach *The American Mathematical Monthly*, w którym prosił on czytelników magazynu o udowodnienie, że $S(n, 1) = \frac{n}{2}$. Okazało się, że zależność ta nie jest prawdziwa; pierwszy kontrprzykład ($n = 20$) pojawił się w 1956 roku (James Lighthill), w 1985 roku B.A. Troesch zaproponował elegancki kontrprzykład dla $n = 14$ – należy rozważyć ciąg liczb $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$. Okazuje się, że jest to najmniejszy (co do n) możliwy kontrprzykład – hipoteza Shapiro została udowodniona dla parzystych $n \leqslant 12$ oraz nieparzystych $n \leqslant 23$. Wiadomo również, jaka jest największa stała D, dla której $S(n, 1) \geqslant Dn$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Jest to tak zwana *stała Drinfelda* i wynosi w przybliżeniu 0,494. Precyzyjniej, $D = \frac{1}{2}\phi(0)$, gdzie ϕ jest największą funkcją wypukłą, która ogranicza z dołu funkcje e^{-x} oraz $2(e^x + e^{x/2})^{-1}$. Zatem dla $\alpha = 1$ znamy kompletną odpowiedź. Szczegóły znajdziemy na przykład w [1] i [2]. Warto przy okazji nadmienić, że Władimir Drinfeld – autor wspomnianej nierówności – był laureatem Medalu Fieldsa w 1990 roku, a niedawno (w 2018 roku) otrzymał Nagrodę Wolfa w dziedzinie matematyki.

Łatwo uzasadnić, że $S(n, 1) \leqslant \frac{n}{2}$; wystarczy rozpatrzeć ciąg samych jedynek.

Rozwiązanie zadania F 993.
Silniki samochodów sportowych dysponują zwykle nadmiarem mocy i są w stanie wytworzyć moment siły pozwalający zerwać przyczepność opon do podłoża. W takich warunkach, maksymalna możliwa do osiągnięcia prędkość wynika z wartości sił oporu i granicy przyczepności opon. Przy dużych prędkościach niemal cała siła oporu pochodzi od oporu powietrza i jest proporcjonalna do kwadratu prędkości: $F_{\rm op} = av^2$. Zerwanie przyczepności opon następuje, gdy zostanie przekroczona graniczna wartość tarcia statycznego: $T = fQ$, gdzie f oznacza współczynnik tarcia statycznego opon o podłoże, a Q siłę nacisku na koła napędzające. Maksymalna prędkość $v_{\max}$ odpowiada warunkowi $T = F_{\rm op}$, a więc:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{fQ}{a}}.$$

Jeśli dla naszego oszacowania przyjmiemy uproszczenie, że siła Q jest proporcjonalna do całkowitej masy pojazdu, to otrzymujemy, że w drugiej próbie kierowca osiągnął

$$v_2 = (1520/1200)^{1/2} 200 \text{ km/godz.} \approx \approx 225 \text{ km/godz.}$$

Okazuje się, że dla $\alpha \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zachodzi nierówność $S(n, \alpha) \geqslant \frac{n}{2^\alpha}$, zaś równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby w ciągu są równe. Dowód można odnaleźć w [5]. Zatem dla $\alpha \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ też wszystko jest jasne.

Pozostają więc do zbadania przypadki: $1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $0 < \alpha < 1$. Dalej interesować nas będzie tylko ta druga sytuacja. Ustalmy liczby rzeczywiste $x, y, z > 0$ oraz $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$. Niech $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, wówczas $0 < \gamma < 1$. Mamy $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\alpha = \left(\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma\right)^\beta > \left(\frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}\right)^\beta$, bo jeżeli $0 < \gamma < 1$, to $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma > \frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}$. Wobec tego dla wszystkich wykładników $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$ zachodzi nierówność $S(n, \alpha) \geqslant S(n, \beta)$.

Z rozwiązania problemu Shapiro i powyższej uwagi wnioskujemy, że dla parzystych liczb $n \leqslant 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha < 1$ zachodzi $S(n, \alpha) \geqslant \frac{n}{2}$. Liczby $\frac{n}{2}$ nie można tu zastąpić liczbą większą, wystarczy bowiem rozważyć 1, 0, 1, 0, …, 1, 0. Zatem dla parzystych liczb $n \leqslant 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha \leqslant 1$ mamy pełną odpowiedź: $S(n, \alpha) = \frac{n}{2}$.

Rozumowanie podane w rozwiązaniu zadania 766 pochodzi z pracy [4] i było potem wielokrotnie odkrywane ponownie.

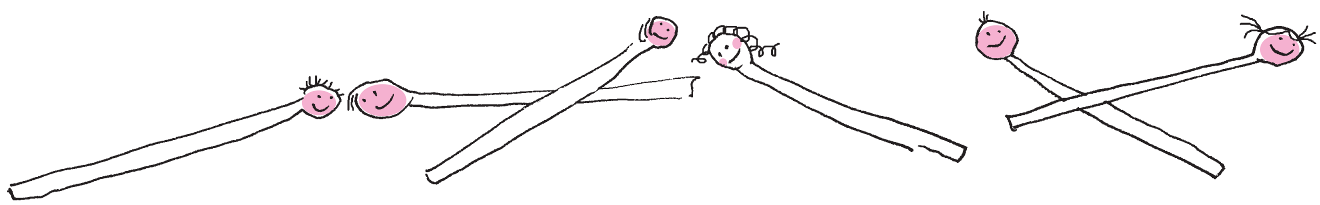
Rozumując podobnie jak w firmowym rozwiązaniu zadania 766 (zobacz Δ^1_{19}), możemy udowodnić nierówność $S(n, \alpha) \geqslant \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor \cdot \frac{1}{2^\alpha}$ dla wszystkich n i α. Z drugiej strony, rozważając ciąg 1, 0, 1, 0, …, 1, 0 dla n parzystych lub 1, 1, 0, 1, …, 0 (dwie jedynki sąsiadują) dla n nieparzystych, dostajemy $S(n, \alpha) \leqslant \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$. Ponieważ 2^α zbiega do 1, gdy α dąży do 0, więc naturalna jest hipoteza, że dla bliskich 0 wartości wykładnika α zachodzi $S(n, \alpha) = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$. Jak zauważyliśmy wyżej, jest ona spełniona dla parzystych $n \leqslant 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha \leqslant 1$, gdyż dla parzystych n mamy $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Dla $n = 3$ oraz $0 < \alpha < \log_2 \frac{3}{2} \approx 0{,}58496$ i dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha > 2$. Jest to udowodnione w [3]. Zatem $S(3, \alpha) = 2$ dla $0 < \alpha \leqslant \log_2 \frac{3}{2}$. Oczywiście dla $\alpha > \log_2 \frac{3}{2}$ jest $S(3, \alpha) < 2$, co widać na przykładzie liczb $a = b = c = 1$. Dla $n = 3$ oraz dla parzystych liczb $n \leqslant 12$ wszystko jest więc jasne.

Na podstawie udowodnionej wyżej nierówności $S(n, \alpha) \geqslant S(n, 1)$ dla $0 < \alpha < 1$ oraz tego, co wiadomo z rozwiązania problemu Shapiro, otrzymujemy, że $S(n, \alpha) \geqslant \frac{n}{2}$ dla liczb nieparzystych $n \leqslant 23$ oraz $S(n, \alpha) \geqslant Dn$ dla pozostałych wartości n.

Kierując się wyłącznie intuicją, postawiłem hipotezę, że $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ dla wszystkich n oraz $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Nie potrafię tego dowieść dla żadnej liczby n poza wskazanymi powyżej (czyli dla $n = 3$ oraz parzystych $n \leqslant 12$). O sytuacji dla pozostałych wartości n mogę powiedzieć bardzo niewiele. Jedynie dla $n = 5$ (najmniejsza niezbadana wartość n) udało mi się pokazać, że $S(5, \alpha) = 3$ dla $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{5}$, co stanowi pełne rozwiązanie zadania 766. Dowód udostępniony jest na stronie *Delty*. Będę bardzo wdzięczny za wszelkie uwagi lub związane wyniki. Na przykład dowody nierówności postaci $S(n, \alpha) > M > \frac{n}{2}$ dla nieparzystych n i możliwie dużych α (najlepiej $\alpha > \frac{1}{2}$) lub ewentualne kontrprzykłady do uczynionych wyżej hipotez. Zapraszam do kontaktu poprzez zamieszczony na początku artykułu adres poczty elektronicznej, a także do dyskusji w komentarzach do tego artykułu na stronie *Delty*. Według mojej wiedzy w literaturze ani w sieci nie ma aktualnie żadnych innych tego rodzaju wyników. Uzyskanie takowych może więc być cenne, w szczególności dla osób zainteresowanych Konkursem Prac Uczniowskich z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

Literatura:
[1] Kourliandtchik, L. (2002). *Słynne nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat.
[2] „Shapiro inequality” Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostęp 7 sierpnia 2019 r.
[3] Hung, P. K. (2008). *Secrets in Inequalities* vol. 2 – „Advanced Inequalities”, Gil Publishing House, darmowy rozdział dostępny na stronie wydawcy.
[4] Diananda, P. H. (1973). *Some cyclic and other inequalities. III*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 73, part 1, 69–71.
[5] Diananda, P. H. (1974). *Some cyclic and other inequalities. IV*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 76, part 1, 183–186.



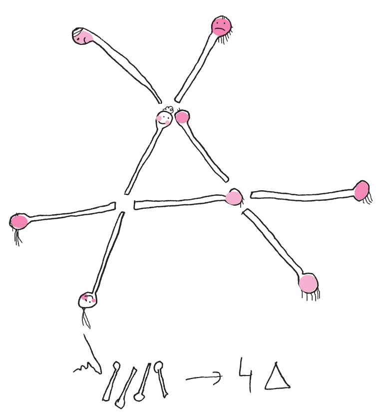
Spadek swobodny z księżycowej orbity

*Andrzej SOŁTAN**

*CAMK PAN, Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Astronomicznej

Siła grawitacji sprawia, że jakikolwiek upuszczony przedmiot spada ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość przyspieszenia ziemskiego znamy na pamięć. Można więc obliczyć położenie ciała i jego prędkość w dowolnej chwili. Również czas spadania wyznaczymy natychmiast, jeżeli tylko znamy wysokość początkową. Trudno o mniej wymagające zadanie z dynamiki.

Rachunki się komplikują, gdy ciało spada z dużej wysokości. Tak dużej, że nie możemy już przyjąć, iż przyspieszenie ziemskie jest stałe. Na przykład z wysokości orbity Księżyca. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne maleje z kwadratem odległości, 384 750 km od Ziemi (średnia odległość Księżyca od środka Ziemi) natężenie pola grawitacyjnego Ziemi jest około 3600 razy słabsze niż w pobliżu jej powierzchni. Wiedział to już Izaak Newton, co znacząco pomogło mu sformułować prawo powszechnej grawitacji.



Jak długo zatem będzie trwał spadek swobodny w centralnym polu grawitacyjnym Ziemi z wysokości orbity Księżyca? Promień orbity Księżyca jest 60 razy większy od promienia Ziemi. Wobec takiej różnicy wielkości, dla uproszczenia, pomińmy w rachunkach rozmiar Ziemi. Dokładnie tak brzmiało